

Питання до іспиту з диференціальної геометрії

2020/21

1. Гладка структура, гладкий многовид, гладке відображення. Приклади.
2. Криві на гладкому многовиді. Замкнені криві. Еквівалентність. Регулярні і вкладені криві в \mathbb{R}^n . Дотична. Довжина кривої в E^n . Натуральний параметр.
3. неявно задані криві на площині. Теорема Уїтні про неявно задані гіперповерхні. Обгортки.
4. Репер Френе, кривини, формули Френе для кривих в E^n . Основна теорема теорії кривих.
5. Геометрична характеристика першої кривини. Репер Френе, кривина і скрут кривих в E^2 і E^3 . Еволюти і евольвенти, опуклість плоских кривих.
6. Дотичний простір підмноговиду в \mathbb{R}^m . Дотичний вектор кривої у підмноговиді.
7. Дотичний простір гладкого многовида. Гладкі функції Урисона. Еквівалентність означень дотичного простору. Дотичний вектор кривої.
8. Диференціал і ранг гладкого відображення. Приклади. Дифеоморфізми і локальні дифеоморфізми, критичні точки, субмерсії, занурення, вкладення.
9. Підмноговиди, різні означення, еквівалентність. Теорема про занурення і вкладення (Уїтні), про прообраз регулярного значення (без доведень).
10. Векторні розшарування. Дотичне розшарування. Векторне розшарування як гладкий многовид.
11. Перетини векторного розшарування та їхня гладкість. Модуль перетинів.
12. Тензори в точці. Тензорне розшарування і тензорні поля. Векторне поле. Векторне поле як диференціювання. Скобка Лі та її властивості. Інтегрування векторних полів. Повні поля і потоки.
13. Гладкі форми. Форма на многовиді як форма від векторних полів. Узагальнення цієї конструкції на загальні тензорні поля. Кодиференціал.
14. Симетричні та зовнішні форми. Симетричний і зовнішній добуток, властивості. Зовнішні n -форми на n -вимірному многовиді.
15. Орієнтовність многовидів, орієнтації. Випадок зв'язного многовиду. Дезорієнтуючі шляхи і неорієнтовність. Приклади.
16. Кубовні множини. Розбиття одиниці. Інтегрування форм на орієнтованому многовиді. Диференціал зовнішньої форми. Теорема Стокса. (Без доведень.)
17. Ріманова метрика, ріманів многовид. Перша фундаментальна форма підмноговиду. Приклади. Довжина шляху на рімановому многовиді та її властивості. Натуральний параметр. Кут між кривими.

18. Ріманова форма об'єму та об'єм множин. Підйом та спуск індексів. Кометрика. Сума ріманових метрик.
19. Ізометрії. Критерії ізометричності. Локальна ізометричність. Приклади.
20. Конформна еквівалентність. Критерії конформності. Приклади. Теорема Корна-Ліхтенстайна (без доведення).
21. Внутрішня метрика ріманового многовиду та її властивості.
22. Метрична топологія. Найкоротші. Внутрішня метрика підмноговиду. Повнота. Приклади. Ізометрії внутрішньої метрики.
23. Зв'язність на векторному розшаруванні. Коваріантне диференціювання уздовж кривої, паралельні перетини та паралельне перенесення.
24. Афінна зв'язність. Паралельність та геодезичні. Скрут. Зв'язність на тензорному розшаруванні.
25. Узгодженість з метрикою. Ріманова зв'язність (Леві-Чівіта). Формула Кошуля, існування і єдиність ріманової зв'язності. Збереження довжини паралельного поля у рімановому випадку. Ріманові геодезичні. Геодезична кривина. Приклади.
26. Варіації та формула першої варіації довжини. Опис регулярних найкоротших на рімановому многовиді.
27. Експоненційне відображення в точці ріманового многовиду. Нормальні та кульові нормальні околиці. Нормальні координати. Напівгеодезичні координати та лема Гаусса.
28. Геодезичні і найкоротші у кульовому нормальному околиці. Опис кусково гладких найкоротших на рімановому многовиді. Геодезична повнота. Теорема Хопфа-Рінова-Кон-Фоссена (без доведення).
29. Нормальний простір і нормальне розшарування підмноговиду. Нормальні векторні поля. Коваріантне диференціювання дотичних і нормальних векторних полів підмноговиду у зв'язності охопного многовида.
30. Розкладення Гаусса і Вейнгартена. Індукована зв'язність, друга фундаментальна форма, оператор Вейнгартена і нормальна зв'язність, їхні властивості.
31. Розкладення Гаусса і Вейнгартена для гіперповерхні. Одиначне нормальне векторне поле і скалярна друга фундаментальна форма. Локальний вигляд розкладень Гаусса і Вейнгартена. Поле і функція середньої кривини.
32. Розкладення Гаусса для кривої. Нормальна кривина підмноговиду. Випадок підмноговиду евклідового простору. Цілоком геодезичні підмноговиди. Критерій у термінах другої фундаментальної форми. Приклади. Єдиність.
33. Головні кривини і головні напрямки у точці гіперповерхні, їхні властивості. Формула Ейлера. Кривина Гаусса-Кронекера. Типи точок гіперповерхні. Зв'язок з опуклістю.

34. Гауссове відображення. Теорема Гаусса про об'єм сферичного образу. Геометричний зміст модуля кривини Гаусса-Кронекера. Приклади.
35. Лінії кривини та їхні властивості. Асимптотичні напрямки, асимптотичні лінії та їхні властивості. Існування спеціальних систем локальних координат (без доведення).
36. Тензор кривини та його симетрії.
37. Тензор Річчі. Тензор Рімана. Секційна кривина, кривина Річчі та скалярна кривина. Ейнштейнові многовиди.
38. Формула другої варіації довжини геодезичної. Теорема Майєрса.
39. Многовиди постійної секційної кривини. Модельні простори постійної кривини. Теорема Шура.
40. Геодезичні варіації та поля Якобі. Спряжені точки. Теорема Якобі (без доведення).
41. Теорема Рімана. Теорема Картана-Кіллінга (ідея доведення). Теорема Мостова (без доведення).
42. Простори Адамара. Теорема Картана-Адамара. Теорема Прессмана (без доведення). Теореми про простори невід'ємної кривини (Сінга, про сферу, про душу – без доведень).
43. Рівняння Гаусса і Кодацці гіперповерхні. Локальний запис. Випадок гіперповерхні у просторі постійної кривини. Зовнішня кривина. Теорема Гаусса.
44. Цілком омбілічні гіперповерхні. Опис цілком омбілічних гіперповерхонь евклідового простору. Теорема Бонне (без доведення).