Функціональний аналіз II
Тема 4. Оператори в гільбертовому просторі
Лекції 25-26

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Оператор $U \in L(H)$ називається унітарним, якщо

$$UU^* = U^*U = I.$$

Іншими словами, оператор U є унітарним, якщо він оборотний і $U^{-1} = U^*$.

Теорема. Унітарний оператор зберігає скалярний добуток: $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ для будь-яких $x, y \in H$. Відповідно, унітарний оператор зберігає ортогональність: якщо $x \perp y$, то $Ux \perp Uy$.

Критерій унітарності. Оператор $U \in L(H)$ унітарний тоді і тільки тоді, коли він є бієктивною ізометрією.

Теорема. Спектр унітарного оператора лежить на одиничному колі.

Нехай $T \in L(H)$ – довільний оператор. За аналогією з числами, можна припустити, що оператор T^*T буде додатним самоспряженим оператором. Перевіримо цю гіпотезу. З огляду на рівності $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$ маємо самоспряженість. Додатність випливає з аксіом скалярного добутку:

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geqslant 0.$$

Оскільки оператор T^*T додатний, то функція $\sqrt{t}$ неперервна на спектрі оператора, що дає нам підстави ввести таке означення модуля оператора: $|T| = \sqrt{T^*T}$. Модуль оператора – це додатний оператор. Як показує наступна теорема, модуль тісно пов'язаний з вихідним оператором.

Теорема 1. Для будь-якого елемента $x \in H$ виконується співвідношення $\| \, |T| \, x\| = \|Tx\|$. Зокрема, $|T| \, x = 0$ тоді і тільки тоді, коли $Tx = 0$.

Доведення.

$$\| \, |T| \, x\|^2 = \langle |T| \, x, |T| \, x \rangle$$

$$= \left\langle |T|^2 \, x, x \right\rangle = \langle T^* Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 . \qquad \square$$

Теорема 2 (послаблена формула полярного розкладу). Нехай X – образ оператора $|T|$, Y – образ оператора T. Тоді існує ізометричний бієктивний оператор $V \in L(X, Y)$, такий що $T = V \circ |T|$. Більше того, такий оператор єдиний.

Доведення. Почнемо з єдиності. Нехай $x = |T|(h)$ – довільний елемент простору X. Щоб потрібна рівність $T = V \circ |T|$ виконувалась для елемента h, необхідно і достатньо, щоб оператор V задовольняв умову $Vx = Th$. Отже, V визначений однозначно. На підставі попередньої теореми якщо у елемента x є два різних зображення

$$x = |T|(h_1) = |T|(h_2),$$

то $\|Th_1 - Th_2\| = 0$, тобто умову $Vx = Th$ можна взяти за означення шуканого оператора V. Коли елемент h пробігає весь гільбертів простір H, елементи $x = |T|(h)$ і $Vx = Th$ пробігають всі X і Y відповідно. Отже, оператор V бієктивний.

Нарешті, в силу рівностей

$$\|Vx\| = \|Th\| = \|\,|T|\,(h)\,\| = \|x\|$$

оператор V здійснює ізометрію. $\square$

Вправи

Обчислити модулі таких операторів:

13.1. Оператора множення A_g на обмежену вимірну функцію g: $A_g \in L\left(L_2(\Omega, \Sigma, \mu)\right)$, $\left(A_g f\right)(t) = g\,(t)\, f\,(t)$;

13.2. Оператора $S_r \in L(\ell_2)$ зсуву вправо $S_r(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$;

13.3. Оператора $S_l \in L(\ell_2)$ зсуву вліво $S_l(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

Полярним розкладом оператора T називається зображення оператора у вигляді $T = UA$, де U – унітарний, а A – додатний самоспряжений оператор. Тобто полярний розклад операторів – це аналог полярного розкладу $z = e^{i\arg z} \cdot |z|$ для комплексних чисел. На відміну від скалярного випадку, для операторів таке зображення не завжди можливе. Щоб встановити умови існування полярного розкладу, розглянемо його як рівняння з невідомими операторами U і A.

Припустимо, що U і A – шукані розв'язки рівняння $T = UA$. Тоді $T^* = AU^*$ (ми використали самоспряженість оператора A) і на підставі унітарності U маємо $T^*T = A^2$. Добуваючи корінь, одержуємо значення одного з невідомих:

$$A = |T|.$$

Для визначення другого з невідомих маємо рівняння $T = U \circ |T|$. Чим ця умова відрізняється від аналогічної умови на оператор V з теореми 2? Тільки тим, що оператор U потрібно визначити не тільки на підпросторі $X = |T|(H)$, а на всьому просторі зі збереженням властивостей ізометричності і бієктивності, які мав оператор V.

Проаналізуємо, коли ж таке продовження можливе. Щоб сформулювати результат, уточнимо, що таке вимірність гільбертового простору. Для скінченновимірного простору вимірністю називалась кількість елементів в базисі цього простору. Узагальнюючи на нескінченновимірний випадок, назвемо вимірністю гільбертового простору потужність його ортонормованого базису. Вимірності двох гільбертових просторів збігаються тоді і тільки тоді, коли ці простори ізоморфні.

Лема. Нехай X, Y – лінійні підпростори гільбертового простору H, $V \in L(X, Y)$ – бієктивна ізометрія. Тоді такі умови еквівалентні:

(1) відображення V можна продовжити до унітарного оператора $U \in L(H)$;

(2) $\dim X^{\perp} = \dim Y^{\perp}$, причому вимірності можуть бути як скінченними, так і нескінченними.

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Оскільки на X оператори U і V збігаються, то $U(X) = Y$. Оскільки унітарний оператор, так само, як і обернений до нього, зберігає ортогональність, отже, $U\left(X^{\perp}\right) = Y^{\perp}$. Тобто маємо потрібний ізоморфізм для перевірки рівності вимірностей.

$(2) \Rightarrow (1)$. Не порушуючи загальності, підпростори X і Y можна вважати замкненими (в протилежному випадку продовжимо оператор V за неперервністю на замикання підпростору X). На підставі рівності вимірностей існує бієктивна ізометрія $W\colon X^{\perp} \to Y^{\perp}$. Для довільного $x \in H$ випишемо розклад $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X,\ x_2 \in X^{\perp}$. Означимо потрібний оператор U за правилом $Ux = Vx_1 + Wx_2$. $\square$

Теорема 3. Для існування полярного розкладу оператора T необхідно і достатньо, щоб виконувалась така рівність вимірностей: $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^*$.

Доведення. З огляду на попередню лему і міркування, що їй передували, потрібною необхідною і достатньою умовою є рівність $\dim (|T|(H))^\perp = \dim (T(H))^\perp$. Щоб звести цю умову до потрібного твердження, зазначимо, що $(T(H))^\perp = \operatorname{Ker} T^*$. З іншого боку, з огляду на самоспряженість, $(|T|(H))^\perp = \operatorname{Ker} |T|$. У свою чергу, за теоремою 1, $\operatorname{Ker} |T| = \operatorname{Ker} T$. □

Зазначимо деякі корисні достатні умови існування полярного розкладу.

1. Для існування полярного розкладу оператора T достатньо, щоб оператор був оборотним.
2. Нехай T – нормальний оператор, тобто T комутує з T^*. Тоді для T існує полярний розклад.
3. Нехай оператор T має вигляд «скалярний + компактний». Тоді T має полярний розклад.

Доведення. 1. Якщо T оборотний, то й T^* оборотний. Отже, $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^* = 0$.
2. $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} |T| = \operatorname{Ker} \sqrt{T^* T} = \operatorname{Ker} \sqrt{TT^*} = \operatorname{Ker} |T^*| = \operatorname{Ker}(T^*)$.
3. Випливає з теореми Фредгольма, що для оператора вигляду $T = I - A$, де A – компактний, ядро скінченновимірне і $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^*$. Ми доводили лише частковий випадок цієї теореми: якщо $\dim \operatorname{Ker} T = 0$, то й $\dim \operatorname{Ker} T^* = 0$.

Вправи

13.4. Доведіть, що будь-який оператор $T \in L(H)$ однозначно зображується у вигляді $T = A + iB$, де A і B – самоспряжені оператори. При цьому оператор T буде нормальним тоді і тільки тоді, коли A і B комутують. Таке зображення є відправною точкою для одного зі способів побудови функцій від нормального оператора

13.5. Доведіть, що оператор T буде нормальним тоді і тільки тоді, коли для нього існує полярне зображення з комутовними операторами A і U.

13.6. Доведіть, що якщо для оператора існує некомутативний полярний розклад, то оператор T не є нормальним[1].

[1] Терміна «ненормальний оператор» ми намагаємось уникати, хоча в математичній літературі вживається навіть термін «цілком ненормальний оператор» – оператор, обмеження якого на будь-який інваріантний підпростір не є нормальним.