Функціональний аналіз II
Тема 4. Оператори в гільбертовому просторі
Лекції 23-24

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Означення.

Нехай A – самоспряжений оператор, $f \in C(\sigma(A))$ – неперервна функція, задана на спектрі оператора A.

Означимо функцію f від оператора A у такий спосіб:

$$f(A) = \lim_{n \to \infty} p_n(A),$$

де (p_n) – довільна послідовність поліномів, рівномірно збіжна на $\sigma(A)$ до f.

Спочатку зазначимо властивості, які одержуються прямим граничним переходом від поліномів до неперервних функцій від самоспряженого оператора.

Теорема 1. Нехай A – самоспряжений оператор, $f_1, f_2 \in C(\sigma(A))$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Тоді

(1) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(A) = \lambda_1 f_1(A) + \lambda_2 f_2(A)$ і

(2) $(f_1 f_2)(A) = f_1(A) f_2(A)$.

Далі, нехай $f \in C(\sigma(A))$ – неперервна функція. Тоді

(3) $(f(A))^* = \bar{f}(A)$. Зокрема, якщо функція f набуває на $\sigma(A)$ тільки дійсні значення, то $f(A)$ – самоспряжений оператор.

(4) $\|f(A)\| = \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$.

Нарешті,

(5) нехай самоспряжені оператори A і B комутують, f і g – неперервні функції на спектрах операторів A і B відповідно. Тоді $f(A)$ і $g(B)$ також комутують між собою.

Теорема 2 (критерій оборотності). Нехай f – неперервна функція, задана на спектрі самоспряженого оператора A. Для того, щоб оператор $f(A)$ був оборотним, необхідно і достатньо, щоб функція f не мала коренів на спектрі оператора A.

Доведення. Припустимо спочатку, що функція f не має коренів на спектрі. Тоді $\frac{1}{f}$ також буде неперервною функцією, і, згідно пункту (2) попередньої теореми, оператор $\frac{1}{f}(A)$ буде оберненим до оператора $f(A)$. Тепер навпаки, нехай функція f дорівнює нулю в деякій точці $t_0 \in \sigma(A)$. Виокремимо послідовність поліномів (p_n), збіжну до f рівномірно на $\sigma(A)$. Не зменшуючи загальності можна вважати, що $p_n(t_0) = 0$ (в протилежному випадку замінимо ці поліноми на $p_n(t) - p_n(t_0)$). Згідно з критерієм оборотності для поліномів від оператора, оператори $p_n(A)$ необоротні. Отже, з огляду на замкненість множини необоротних операторів оператор $f(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A)$ також необоротний. $\square$

Теорема про відображення спектра для неперервних функцій. Нехай A – самоспряжений оператор, $f \in C(\sigma(A))$. Тоді $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Доведення. Повторимо міркування, яке застосовувалось раніше для поліномів. Умова $\lambda \in \sigma(f(A))$ означає необоротність оператора $f(A) - \lambda I = (f - \lambda)(A)$. Згідно з попереднім твердженням, це рівносильно існуванню такого $t \in \sigma(A)$, що $f(t) - \lambda = 0$. У свою чергу, це еквівалентно потрібній умові $\lambda \in f(\sigma(A))$. $\square$

Теорема 3. Добуток двох додатних комутовних операторів є додатним оператором.

Доведення. Нехай $A, B \in L(H)$ – пара додатних комутовних операторів. Оскільки спектр додатного оператора лежить на додатній півосі, то функція $\sqrt{t}$ неперервна на спектрах обох операторів і набуває там дійсні значення. Тому оператори $\sqrt{A}$ і $\sqrt{B}$ – самоспряжені оператори, а за властивістю (5) теореми 1 $\sqrt{A}$ і $\sqrt{B}$ комутують. Маємо:

$$\langle ABx,\ x\rangle = \left\langle \left(\sqrt{A}\sqrt{A}\right)\left(\sqrt{B}\sqrt{B}\right)x,\ x\right\rangle$$

$$= \left\langle \left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)x,\ x\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)x,\ \left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)x\right\rangle = \left\|\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)x\right\|^2 \geqslant 0. \qquad \square$$

Лема 1. Нехай $A \in L(H)$ – самоспряжений оператор, $f \in C(\sigma(A))$ і $f(\sigma(A)) = \{0, 1\}$. Тоді $f(A)$ – ортопроектор на деякий нетривіальний (тобто відмінний від $\{0\}$, і всього H) підпростір.

Доведення. Оскільки функція f задовольняє умову $f^2 = f$, то $f^2(A) = f(A)$, і оператор $f(A)$ буде проектором. З огляду на самоспряженість, $f(A)$ – ортопроектор. Оскільки

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{0, 1\},$$

$f(A)$ не може збігатись ні з нульовим, ні з одиничним оператором. Тобто образ оператора $f(A)$ – це нетривіальний підпростір. $\square$

Нехай $H = H_1 \oplus H_2$, $A_1 \in L(H_1)$, $A_2 \in L(H_2)$. Оператор $A \in L(H)$, який збігається з A_j на H_j, $j = 1, 2$ називається прямою сумою операторів A_1, A_2, яка підпорядковується розбиттю $H = H_1 \oplus H_2$. Скорочений запис: $A = A_1 \oplus A_2$. Іншими словами, якщо $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, то

$$(A_1 \oplus A_2)(h_1 + h_2) = A_1 h_1 + A_2 h_2.$$

Пропонуємо читачеві перевірити самостійно, що оператор $A = A_1 \oplus A_2$ оборотний тоді і тільки тоді, коли оборотні обидва оператори A_1 і A_2. Звідси легко вивести, що $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2) = \sigma(A_1 \oplus A_2)$.

Лема 2. Нехай оператори A і T комутують. Тоді будь-який власний підпростір одного з цих операторів буде інваріантним підпростором для іншого з них.

Доведення. Нехай λ – власне число, а $Y = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ – відповідний власний підпростір оператора A. Візьмемо довільний власний вектор $x \in Y$ і доведемо, що $Tx \in Y$, тобто Tx також є власним вектором із власним числом λ. Справді,

$$A(Tx) = T(Ax) = T(\lambda x) = \lambda(Tx). \qquad \square$$

Теорема 4. Нехай $A \in L(H)$ – самоспряжений оператор, спектр якого є об'єднанням двох неперетинних замкнених множин: $\sigma(A) = K_1 \cup K_2$. Тоді простір розкладається в ортогональну пряму суму $H = H_1 \oplus H_2$ нетривіальних інваріантних підпросторів, а оператор розпадається в пряму суму $A = A_1 \oplus A_2$ операторів, $A_1 \in L(H_1)$, $A_2 \in L(H_2)$ так, що $\sigma(A_1) = K_1$, а $\sigma(A_2) = K_2$.

Доведення. Функції $f_1 = \mathbb{1}_{K_1}$ і $f_2 = \mathbb{1}_{K_2}$ неперервні на $\sigma(A)$. Введемо у розгляд оператори $P_1 = f_1(A)$ і $P_2 = f_2(A)$. За лемою 1, оператори P_j – ортопроектори. Оскільки $f_1 + f_2 \equiv 1$ на $\sigma(A)$, маємо $P_1 + P_2 = I$. Покладемо $H_1 = P_1(H)$, $H_2 = \operatorname{Ker} P_1$. Тоді весь простір розкладається у пряму суму $H = H_1 \oplus H_2$; $H_2 = P_2(H)$, причому $H_1 \perp H_2$, оскільки P_1 – ортопроектор.

H_j – це власний підпростір оператора P_j, що відповідає власному числу 1. З огляду на комутовність функції від оператора з самим оператором, це означає, що H_j інваріантні відносно A. Шукані оператори $A_j \in L\left(H_j\right)$, $j = 1, 2$, означимо як обмеження оператора A на відповідний підпростір H_j. При такому означенні співвідношення $A = A_1 \oplus A_2$ і

$$\sigma\left(A_1\right) \cup \sigma\left(A_2\right) = \sigma\left(A\right) = K_1 \sqcup K_2,$$

очевидно, виконуються. Тому для завершення доведення залишилось перевірити включення $\sigma\left(A_j\right) \subset K_j$, $j = 1, 2$.

З огляду на симетрію умови нам достатньо розглянути випадок $j = 1$. Нехай $\lambda \notin K_1$. Означимо функцію $g(t)$, яка дорівнює $\frac{1}{t-\lambda}$ при $t \in K_1$ і дорівнює 0 на K_2. Для будь-якого $x \in H_1$ маємо:

$$g(A)(A_1 - \lambda I)x = g(A)(A - \lambda I)x = f_1(A)x = P_1 x = x.$$

Підпростір H_1 інваріантний для $g(A)$, отже, з огляду на комутативність, остання рівність означає, що обмеження оператора $g(A)$ на підпростір H_1 буде оберненим до $A_1 - \lambda I$. Ми довели імплікацію $\lambda \notin K_1 \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A_1)$, еквівалентну включенню $\sigma(A_1) \subset K_1$. □

Наслідок. Нехай λ_0 – ізольована точка спектра самоспряженого оператора A. Тоді λ_0 є власним числом цього оператора.

Доведення. Застосуємо попереднє твердження, взявши $K_1 = \{\lambda_0\}$, $K_2 = \sigma(A) \setminus \{\lambda_0\}$. У цьому випадку $\sigma(A_1) = \{\lambda_0\}$, тобто $A_1 - \lambda_0 I = 0$, і будь-який ненульовий елемент підпростору H_1 буде потрібним власним вектором.

□

Комплексне число, що лежить на одиничному колі, задовольняє рівняння $z \cdot \bar{z} = 1$. Розвиваючи аналогію між операторами і числами, природно ввести відповідний клас операторів.

Оператор $U \in L(H)$ називається унітарним, якщо

$$UU^* = U^* U = I.$$

Іншими словами, оператор U є унітарним, якщо він оборотний і $U^{-1} = U^*$.

Теорема 5. Унітарний оператор зберігає скалярний добуток: $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ для будь-яких $x, y \in H$. Відповідно, унітарний оператор зберігає ортогональність: якщо $x \perp y$, то $Ux \perp Uy$.

Доведення. $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^* Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. □

Теорема 6 (критерій унітарності). Оператор унітарний тоді і тільки тоді, коли він є бієктивною ізометрією.

Доведення. Нехай U – унітарний оператор. Він оборотний, тому бієктивний. Далі,

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \,,$$

тобто U – ізометрія. Навпаки, нехай U – ізометрія. Тоді

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^* Ux \rangle \,.$$

Отже, квадратичні форми самоспряжених операторів $U^* U$ і I однакові, тому збігаються і самі оператори: $I = U^* U$.
А оскільки для бієктивного оператора поняття правого оборотного та лівого оборотного тотожні, то й $UU^* = I$, що і потрібно було довести. □

Теорема 7. Спектр унітарного оператора лежить на одиничному колі.

Доведення. З огляду на ізометрію $\|U\| = \left\|U^{-1}\right\| = 1$. Тому, якщо $|\lambda| < 1$, то оператор $U - \lambda I$ оборотний за теоремою про мале збурення оборотного оператора, а якщо $|\lambda| > 1$, то оборотність оператора $U - \lambda I = \lambda(I - \lambda^{-1} U)$ нам гарантує лема про мале збурення одиничного оператора. Виходить, що оператор $U - \lambda I$ може бути необоротним тільки при $|\lambda| = 1$. □