Функціональний аналіз II
Тема 4. Оператори в гільбертовому просторі
Лекції 21-22

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Теорема про структуру спектра самоспряженого оператора. Нехай $A \in L(H)$ – самоспряжений оператор. Введемо позначення

$$\alpha_- = \alpha_-(A) = \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in S_H\},$$
$$\alpha_+ = \alpha_+(A) = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in S_H\}.$$

Тоді

(i) спектр оператора A складається тільки з дійсних чисел;

(ii) $\sigma(A) \subset [\alpha_-, \alpha_+]$;

(iii) кінці відрізка $[\alpha_-, \alpha_+]$ належать до спектра.

Доведення. Властивість (i) ми довели на попередній лекції. Доведемо властивість (ii). Зазначимо, що $A - \alpha_+ I \leqslant 0$. Справді, для будь-якого $x \in S_H$ маємо

$$\langle (A - \alpha_+ I)\, x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle - \alpha_+ \leqslant 0.$$

Нехай $\lambda > \alpha_+$, $\varepsilon = \lambda - \alpha_+$. Доведемо оборотність оператора $A - \lambda I = (A - \alpha_+ I) - \varepsilon I$, для чого достатньо довести його обмеженість знизу. Маємо

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)\, x\|^2 &= \|(A - \alpha_+ I)\, x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle (A - \alpha_+ I)\, x, \varepsilon x \rangle + \varepsilon^2 \|x\|^2 \\ &\geqslant \varepsilon^2 \|x\|^2 . \end{aligned}$$

Отже, оператор $A - \lambda I$ оборотний, тобто $\lambda \notin \sigma(A)$. Цим для довільного самоспряженого оператора A доведено включення $\sigma(A) \subset (-\infty, \alpha_+]$. Заміною оператора A на $-A$ одержимо, що

$$-\sigma(A) = \sigma(-A) \subset (-\infty, \alpha_+(-A)] = (-\infty, -\alpha_-(A)],$$

тобто що $\sigma(A) \subset [\alpha_-(A), +\infty)$.

(iii) Доведемо, що $\alpha_- \in \sigma(A)$, тобто що оператор $B = A - \alpha_- I$ необоротний. У цьому нам допоможе така очевидна властивість квадратичної форми оператора B:

$$\inf_{x \in S_H} \langle Bx, x \rangle = \inf_{x \in S_H} \langle Ax, x \rangle - \alpha_- = 0.$$

Зокрема, оператор B додатний. Скористаємось теоремою 5 з попередньої лекції:

$$\inf_{x \in S_H} \|Bx\| \leqslant \|B\|^{1/2} \inf_{x \in S_H} \langle Bx, x \rangle^{1/2} = 0.$$

Отож, оператор необмежений знизу і, тому, необоротний. Належність числа α_+ до спектра легко отримати заміною оператора A на $-A$, як ми це вже робили вище. Теорему доведено. $\square$

Наслідок 1. Самоспряжений оператор є додатним тоді і тільки тоді, коли його спектр складається тільки з невід'ємних чисел.

Доведення. Оператор A є додатним тоді і тільки тоді, коли $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ для всіх $x \in S_H$. Ця сама умова еквівалентна тому, що $\alpha_-(A) \geqslant 0$. $\square$

Наслідок 2. Нехай A – самоспряжений оператор. Тоді

$$\|A\| = \sup\{\, |t| : \ t \in \sigma(A)\} .$$

Доведення.

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in S_H\} = \max\{\, |\alpha_-(A)|, |\alpha_+(A)|\} =$$

$$= \sup\{\, |t| : \ t \in \sigma(A)\} . \quad \square$$

Наслідок 3. Нехай A – самоспряжений оператор, $\sigma(A) = \{0\}$. Тоді $A = 0$.

Доведення. За наслідком 2, якщо $\sigma(A) = \{0\}$, то $\|A\| = 0$. □

Зазначимо, що для несамоспряжених операторів вищенаведені наслідки можуть і не виконуватись.

Приклад. Оператор в двовимірному просторі задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Його спектр дорівнює $\{0\}$, проте оператор ненульовий.

Вправи

11.1. Нехай A – самоспряжений оператор, $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$. Тоді $A = \lambda_0 I$.

11.2. Нехай $K \neq \emptyset$ – довільна замкнена обмежена множина дійсних чисел. Побудуйте самоспряжений оператор A, для якого $\sigma(A) = K$.

На деякий час ми знову розглядатимемо оператори в довільному комплексному банаховому просторі X.

Означення. Нехай дано поліном $p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ і оператор $T \in L(X)$. Оператор вигляду

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n$$

називається поліномом від оператора T.

Теорема 1. Нехай p_1, p_2 – поліноми, $T \in L(X)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Тоді

(i) $(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(T) = \lambda_1 p_1(T) + \lambda_2 p_2(T)$;

(ii) $(p_1 p_2)(T) = p_1(T) p_2(T)$.

Далі,

(iii) нехай оператори T_1 і T_2 комутують, p_1, p_2 – поліноми. Тоді $p_1(T_1)$ і $p_2(T_2)$ також комутують між собою.

Доведення. Просто розкрити дужки і порівняти. $\square$

Теорема 2. Оператор $p(T)$ оборотний тоді і тільки тоді, коли поліном p не перетворюється в нуль в жодній точці спектра оператора T.

Доведення. Нехай $t_1, \ldots, t_n$ – корені полінома p, тобто $p(t) = a_n(t-t_1)\cdots(t-t_n)$. Тоді $p(T) = a_n(T-t_1 I)\cdots(T-t_n I)$. Оборотність добутку комутовних співмножників еквівалентна одночасній оборотності співмножників. Відповідно, оборотність оператора $p(T)$ рівносильна одночасній оборотності множників $T - t_i I$, тобто тому, що жоден з коренів t_i полінома p не належить спектру оператора T. □

Теорема про відображення спектра для поліномів від оператора. Спектр поліномів від оператора складається зі значень полінома на елементах спектра оператора, тобто $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

Доведення. Доведемо, що для числа λ належність до множини, що розташованої в лівій частині потрібної рівності, рівносильна належності до множини у правій частині. Справді, умова $\lambda \in \sigma(p(T))$ означає необоротність оператора

$$p(T) - \lambda I = (p - \lambda)(T).$$

За попереднім твердженням, це еквівалентно тому, що поліном $p - \lambda$ перетворюється нуль в деякій точці спектра: $\exists t \in \sigma(T)$: $p(t) = \lambda$. У свою чергу, це еквівалентно потрібній умові $\lambda \in p(\sigma(T))$. □

Ми повертаємося до операторів в гільбертовому просторі.

Теорема. Нехай $A \in L(H)$ – самоспряжений оператор, $p = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ – поліном. Тоді оператор $p(A)$ має такі властивості:

(i) $(p(A))^* = \bar{p}(A)$, де $\bar{p} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \dots + \bar{a}_n t^n$. Зокрема, $p(A)$ – нормальний оператор. Якщо всі коефіцієнти полінома p дійсні, то $p(A)$ – самоспряжений оператор.

(ii) $\|p(A)\| = \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |p(t)|$.

Доведення. (i)

$$(p(A))^* = \bar{a}_0(I)^* + \bar{a}_1(A)^* + \dots + \bar{a}_n(A^n)^* = \bar{p}(A).$$

(ii) Розглянемо спочатку випадок полінома з дійсними коефіцієнтами. Скористаємось наслідком 2 і теоремою про відображення спектра для поліномів від оператор:

$$\|p(A)\| = \sup_{\tau\in\sigma(p(A))} |\tau| = \sup_{\tau\in p(\sigma(A))} |\tau| = \sup_{t\in\sigma(A)} |p(t)|.$$

Нехай тепер коефіцієнти полінома p мають вигляд $a_j = u_j + iv_j$, де $u_j, v_j \in \mathbb{R}$. Введемо позначення $p_1 = u_0 + u_1 t + ... + u_n t^n$, $p_2 = v_0 + v_1 t + ... + v_n t^n$.
Тоді $\operatorname{Re} p(A) = p_1(A)$, і $\operatorname{Im} p(A) = p_2(A)$
Скористаємось формулою $\|T\| = \sqrt{\|(\operatorname{Re} T)^2 + (\operatorname{Im} T)^2\|}$, що має місце для нормальних операторів, а також вже проаналізованим випадком дійсних поліномів:

$$\|p(A)\| = \|p_1(A) + ip_2(A)\| = \sqrt{\|p_1(A)^2 + p_2(A)^2\|}$$

$$= \sqrt{\left\|\left(p_1^2 + p_2^2\right)(A)\right\|} = \sqrt{\sup_{t\in\sigma(A)} \left|\left(p_1^2 + p_2^2\right)(t)\right|} = \sup_{t\in\sigma(A)} |p(t)|.$$

Лема. Нехай $K \subset \mathbb{R}$ – компакт, $[a, b]$ – найменший відрізок, що містить K. Тоді будь-яку функцію $f \in C(K)$ можна продовжити до неперервної функції, заданої на $[a, b]$.

Доведення. Множина $[a, b] \setminus K$ зображується у вигляді об'єднання відкритих відрізків з кінцями в K. Доозначимо функцію f на кожен такий відрізок $(c, d) \subset [a, b] \setminus K$ за допомогою формули лінійної інтерполяції: $f(t) = f(c) + (t - c)\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$. □

Лема. Нехай $K \subset \mathbb{R}$ – компакт. Тоді для будь-якої функції $f \in C(K)$ існує послідовність поліномів (p_n), рівномірно збіжна на K до f.

Доведення. Нехай $[a, b]$ – найменший відрізок, який містить K. За попередньою лемою, функцію f можна вважати визначеною на всьому $[a, b]$. За теоремою Вейєрштрасса, існує послідовність поліномів (p_n), рівномірно збіжна до f на $[a, b]$. Ця послідовність поліномів буде збігатись до f і на K – підмножині відрізка $[a, b]$. □

Лема. (a) Нехай A – самоспряжений оператор, (p_n) – рівномірно збіжна на $\sigma(A)$ послідовність поліномів. Тоді послідовність операторів $p_n(A)$ збігається за нормою.
(b) Якщо послідовності поліномів (p_n) і (q_n) рівномірно збігаються на $\sigma(A)$ до однієї і тієї ж границі, то $p_n(A)$ і $q_n(A)$ також збігаються до однієї і тієї ж границі.

Доведення. Скористаємось формулою для норми многочлена від самоспряженого оператора, доведеною в попередньому пункті:

$$\|p_n(A) - p_m(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |(p_n - p_m)(t)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

На підставі повноти простору операторів доведено умову (a). Умова (b) доводиться так само:

$$\|p_n(A) - q_n(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |(p_n - q_n)(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Означення.

Нехай A – самоспряжений оператор, $f \in C(\sigma(A))$ – неперервна функція, задана на спектрі оператора A.

Означимо функцію f від оператора A у такий спосіб:

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A),$$

де (p_n) – довільна послідовність поліномів, рівномірно збіжна на $\sigma(A)$ до f.

Обґрунтуванням коректності такого означення є доведені леми.