Функціональний аналіз II
Тема 4. Оператори в гільбертовому просторі
Лекції 19-20

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Теорема про загальний вигляд неперервної білінійної форми в гільбертовому просторі. Нехай F – неперервна білінійна форма в H. Тоді існує такий неперервний оператор $T \in L(H)$, що $F(x, y) = \langle x, Ty \rangle$ для будь-яких x, y з H. Оператор T визначається формою F однозначно.

Означення. Нехай $A \in L(H)$. Спряженим оператором до оператора A називається такий оператор A^*, що рівність $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ виконується для будь-яких елементів $x, y \in H$.

Коректність означення, тобто існування і єдиність оператора A^*, нам гарантує теорема про загальний вигляд неперервної білінійної форми.

Зазначимо властивості операції переходу до спряженого оператора:

1. $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$;
2. $I^* = I$;
3. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;
4. $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$;
5. $(A^*)^* = A$.

Усі перераховані вище властивості перевіряються за однією і тією ж схемою. Доведемо, для прикладу, першу з цих властивостей. Нам потрібно перевірити, що $(A_1 + A_2)^* y = A_1^* y + A_2^* y$ для будь-якого $y \in H$. Для цього, в свою чергу, достатньо перевірити, що $\langle x, (A_1 + A_2)^* y \rangle = \left\langle x, A_1^* y + A_2^* y \right\rangle$ для всіх $x \in H$. Маємо,

$$\langle x, (A_1 + A_2)^* y \rangle = \langle (A_1 + A_2) x, y \rangle = \langle A_1 x, y \rangle + \langle A_2 x, y \rangle =$$

$$= \langle x, A_1^* y \rangle + \langle x, A_2^* y \rangle = \langle x, A_1^* y + A_2^* y \rangle .$$

Зауваження. Хоча спряжений оператор в рамках теорії гільбертового простору означений інакше, ніж для звичайних банахових, по суті, ми маємо справу з частковим випадком цього означення. Справді, якщо кожен елемент $y \in H$ ототожнити з породженим ним лінійним функціоналом на H: $y(x) = \langle x, y \rangle$, то означення $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ перепишеться у звичному вигляді $(T^* y)(x) = y(Tx)$. Тому загальні теореми про зв'язки образів, ядер, ін'єктивності і сюр'єктивності оператора і його спряженого, доведені на попередніх лекціях, зберігають свою силу. (Доведіть це!) Зокрема, якщо оператор A^* ін'єктивний, то образ оператора A щільний в H.

Теорема 1. Нехай оператори A і A^* обмежені знизу. Тоді оператор A оборотний.

Доведення. Оскільки A обмежений знизу, то він ін'єктивний, і його образ замкнений. З обмеженості знизу оператора A^* випливає, що він також ін'єктивний, отже, образ оператора A щільний в H. Оскільки образ оператора A замкнений і щільний в H, то $A(H) = H$, тобто A сюр'єктивний. Ін'єктивність + сюр'єктивність = оборотність. $\square$

Вправи. Назвемо гільберт–шмідтовою нормою оператора A величину

$$\|A\|_{\text{H-S}} = \Big(\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |\langle Ae_n, g_m\rangle|^2 \Big)^{1/2},$$

де $\{e_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$ – фіксована пара ортонормованих базисів гільбертового простору. Оператор назвемо гільберт-шмідтовим, якщо $\|A\|_{\text{H-S}} < \infty$ або, іншими словами, якщо його матриця в цій парі базисів – гільберт-шмідтова. Доведіть, що:

10.1. $\|A\| \leqslant \|A\|_{\text{H-S}}$

10.2. $\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^* g_n\|^2 \Big)^{1/2} = \|A\|_{\text{H-S}} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2 \Big)^{1/2}$.

10.3. $\|A\|_{\text{H-S}}$ не залежить від вибору пари ортонормованих базисів $\{e_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$, і $\|A\|_{\text{H-S}} = \|A^*\|_{H-S}$.

10.4. Застосуйте попередню вправу для доведення такого факту: нехай U – фіксований еліпсоїд у скінченновимірному евклідовому просторі. Тоді всі прямокутні паралелепіпеди, описані навколо U, мають однакові діаметри.

Оператор A в гільбертовому просторі називається самоспряженим, якщо $A^* = A$ або, еквівалентно, якщо $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ для будь-яких елементів $x, y \in H$.

Ми згадували раніше аналогію між операторами і комплексними числами. Для операторів в гільбертовому просторі, завдяки поняттю спряженого оператора, ця аналогія виявляється значно ефективнішою, ніж в загальному випадку. Зокрема, самоспряжені оператори ($A^* = A$) аналогічні дійсним числам ($z = \bar{z}$). Водночас до цієї аналогії варто ставитись з певною обережністю: оператори, на відміну від чисел, можуть не комутувати.
Наступна теорема подає нетривіальні приклади самоспряжених операторів.

Теорема 2. Для проектора $P \in L(H)$ такі умови еквівалентні:

(1) P – самоспряжений оператор;

(2) P – ортопроектор.

Доведення. Оскільки P – проектор, то простір H розкладається у пряму суму $H = H_1 \oplus H_2$, де H_1 – ядро проектора, а H_2 – образ. Доведемо спочатку імплікацію (1)⇒(2), тобто, якщо P – самоспряжений оператор, то $H_1 \perp H_2$. Справді, нехай $h_1 \in H_1$ і $h_2 \in H_2$. Тоді

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \langle h_1, Ph_2 \rangle = \langle Ph_1, h_2 \rangle = 0.$$

Доведемо тепер обернену імплікацію (2)⇒(1), тобто, якщо $H_1 \perp H_2$, то P – самоспряжений оператор. Для цього візьмемо елементи $x, y \in H$ і запишемо їхній розклад $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, де $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_2$. Маємо

$$\langle Px, y \rangle = \langle x_2, y \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x, y_2 \rangle = \langle x, Py \rangle . \qquad \square$$

Нехай A – самоспряжений оператор. Білінійною формою оператора A називається функція $F(x, y) = \langle Ax, y \rangle$; функція $g(x) = \langle Ax, x \rangle$ називається квадратичною формою оператора A.

Зазначимо, що $g(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{g(x)}$, тому квадратична форма самоспряженого оператора набуває тільки дійсні значення. Неважко перевірити, що

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), (x-y) \rangle\right).$$

Аналогічно можна знайти й уявну частину форми $\langle Ax, y \rangle$, тобто білінійна форма однозначно визначається за квадратичною. У свою чергу, з теореми про загальний вигляд білінійної форми випливає, що за білінійною формою можна відновити сам оператор. Отже, всю інформацію про самоспряжений оператор можна одержати, знаючи властивості його квадратичної форми.

Як приклад наведемо корисну формулу для норми самоспряженого оператора.

Теорема 3. Нехай A – самоспряжений оператор. Тоді

$$\|A\| = \sup_{x \in S_H} |\langle Ax, x \rangle| . \tag{1}$$

Доведення. Введемо позначення $q = \sup_{x \in S_H} |\langle Ax, x\rangle|$. Для будь-якого $z \in S_H$ справджується оцінка $|\langle Az, z\rangle| \leqslant q \|z\|^2$. За однорідністю, ця оцінка зберігається і для будь-якого $z \in H$. Потрібно довести, що $\|A\| = q$. Оцінка в одну сторону відразу випливає з нерівності Коші–Буняковського:

$$q = \sup_{x \in S_H} |\langle Ax, x \rangle| \leqslant \sup_{x \in S_H} \|Ax\| = \|A\| .$$

Обернену нерівність отримуємо наступним чином:

$$\|A\| = \sup_{x \in S_H} \|Ax\| = \sup_{x,y \in S_H} \operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle =$$

$$= \sup_{x,y \in S_H} \frac{1}{4}\left(\langle A(x+y),(x+y)\rangle - \langle A(x-y),(x-y)\rangle\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,y \in S_H} \frac{q}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \sup_{x,y \in S_H} \frac{2q}{4}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = q.$$

$\square$

Для оператора $T \in L(H)$ означимо дійсну й уявну частини формулами $\operatorname{Re} T = \frac{1}{2}(T + T^*)$ і $\operatorname{Im} T = \frac{1}{2i}(T - T^*)$. Перевірте, що $\operatorname{Re} T$ і $\operatorname{Im} T$ – самоспряжені оператори і $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$.

Теорема 4. Нехай T і T^* комутують (в цьому випадку оператор T називається нормальним). Тоді $T^* T$ – самоспряжений оператор,

$$T^* T = (\operatorname{Re} T)^2 + (\operatorname{Im} T)^2 \quad \text{і} \quad \|T\| = \sqrt{\|(\operatorname{Re} T)^2 + (\operatorname{Im} T)^2\|}.$$

Доведення. На дошці. □

Наступне означення допоможе поглибити неодноразово згадану вище аналогію між операторами і числами.

Оператор $A \in L(H)$ називається додатним ($A \geqslant 0$), якщо він є самоспряженим оператором з невід'ємною квадратичною формою, тобто $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ для будь-якого $x \in H$. Нехай $A, B \in L(H)$. Вважатимемо, що $A \geqslant B$, якщо $A - B \geqslant 0$.

Теорема 5. Нехай $A \in L(H)$ – додатний оператор. Тоді для будь-якого елемента $x \in H$ виконується нерівність

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|^{1/2} (\langle Ax, x\rangle)^{1/2}.$$

Доведення. Білінійна форма оператора A задовольняє всі аксіоми скалярного добутку, крім невиродженості. Тому для неї виконується нерівність Коші-Буняковського:

$$|\langle Ax, y\rangle| \leqslant \langle Ax, x\rangle^{1/2} \langle Ay, y\rangle^{1/2}.$$

Перейшовши до супремума за $y \in S_H$, отримуємо потрібну оцінку. □

Наступна мета – довести для операторів результат, аналогічний теоремі існування границі для обмеженої монотонної послідовності чисел.

Теорема 6. Нехай самоспряжені оператори $A_n \in L(H)$ утворюють зростаючу обмежену послідовність, тобто $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \ldots$ і $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$. Тоді у цієї послідовності існує поточкова границя.

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $x \in H$. Послідовність чисел $a_n = \langle A_n x, x\rangle$ не спадає і обмежена. Отже, ця послідовність має границю, і

$$a_n - a_m = \langle (A_n - A_m)\, x, x\rangle \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Скориставшись теоремою 5, одержимо потрібну поточкову збіжність:

$$\|A_n x - A_m x\| \leqslant \|A_n - A_m\|^{1/2} \left(\langle (A_n - A_m)\, x, x\rangle\right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Вправи

10.5. T^*T – додатний оператор для будь-якого $T \in L(H)$.

10.6. Будь-який ортопроектор – додатний оператор.

10.7. Нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормований базис в H. Перевірте, що оператори S_n частинних сум утворюють неспадну обмежену послідовність. Який оператор буде їх поточковою границею?

10.8. Чи може в умовах теореми 6 послідовність A_n не збігатися за нормою простору $L(H)$?

10.9. Нехай A, B – додатні оператори і $A + B = 0$. Тоді $A = B = 0$.

10.10. Доведіть, що добуток двох додатних комутовних операторів – додатний оператор.

Теорема про структуру спектра самоспряженого оператора. Нехай $A \in L(H)$ – самоспряжений оператор. Введемо позначення

$$\alpha_- = \alpha_-(A) = \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in S_H\},$$
$$\alpha_+ = \alpha_+(A) = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in S_H\}.$$

Тоді

(i) спектр оператора A складається тільки з дійсних чисел;

(ii) $\sigma(A) \subset [\alpha_-, \alpha_+]$;

(iii) кінці відрізка $[\alpha_-, \alpha_+]$ належать до спектра.

Доведення. (i) Нехай $\lambda = a + bi$ – комплексне число з уявною частиною b, відмінною від нуля. Нам потрібно довести оборотність оператора $A - \lambda I$. Доведемо для початку обмеженість знизу такого оператора.

$$\|(A - \lambda I)\, x\|^2 = \|(Ax - ax) - bix\|^2 =$$

$$= \|Ax - ax\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax - ax, bix\rangle + b^2\,\|x\|^2\,.$$

Величини $\langle Ax, x\rangle$ і $\langle x, x\rangle$ дійсні, тому $2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax - ax, bix\rangle = 0$ і $\|(A - \lambda I)\, x\|^2 \geqslant b^2\,\|x\|^2$, тобто оператор $A - \lambda I$ обмежений знизу. З тієї ж причини обмежений знизу і оператор $(A - \lambda I)^* = A - \bar{\lambda} I$ (він має такий саме вигляд, тільки з іншим коефіцієнтом λ). Тобто, за Теоремою 1, оператор $A - \lambda I$ оборотний.

(ii) , (iii) – не встигаємо, буде на наступній лекції.