Функціональний аналіз II
Тема 3. Спектральна теорія операторів
Лекції 17-18

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Оператори вигляду $I-T$, де T – компактний оператор

Структура спектра компактного оператора

Що треба пригадати про гільбертові простори?

Білінійні форми в гільбертовому просторі

При вивченні спектра цілком неперервного оператора центральне місце має таке твердження.

Теорема 1. Нехай $T \in K(X, X)$. Тоді:

(1) образ оператора $I - T$ – замкнений підпростір.

(2) Якщо оператор вигляду $I - T$ ін'єктивний, то він сюр'єктивний.

(3) Якщо оператор вигляду $I - T$ сюр'єктивний, то він ін'єктивний.

Зазначимо, що разом властивості (2) і (3) означають, що оператор $I - T$ або оборотний, або одночасно і не ін'єктивний, і не сюр'єктивний. Цей підрозділ присвячено доведенню цих властивостей, причому кожна з властивостей (1)–(3) буде виокремлена у твердження.

Твердження 1. Нехай $T \in K(X, X)$. Тоді образ оператора $A = I - T$ є замкненим підпростором.

Доведення. Будемо міркувати методом від супротивного. Позначимо Ker A через Y. Згідно з критерієм, незамкненість образу означає, що існує послідовність (x_n) в X з такими властивостями:

1. $\operatorname{dist}(x_n, Y) = 1$;
2. $\|Ax_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
3. $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

На підставі компактності оператора T послідовність (Tx_n) утворює передкомпакт в X. Перейшовши за потреби до підпослідовності, ми можемо досягти, щоб послідовність (Tx_n) мала границю. Позначимо цю границю літерою s.

Оскільки

$$x_n = Ax_n + Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s,$$

то $\operatorname{dist}(s, Y) = 1$. З іншого боку, $As = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = 0$, тобто s лежить у підпросторі Y – ядрі оператора A. Отримана суперечність завершує доведення. $\square$

Твердження 2. Якщо оператор вигляду $A = I - T$, де $T \in K(X, X)$, ін'єктивний, то він і сюр'єктивний.

Доведення. Будемо міркувати методом від супротивного. Нехай $A(X) \neq X$. Розглянемо підпростори $Y_n = A^n(X)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Спочатку доведемо, що ці підпростори утворюють послідовність $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ строго вкладених підпросторів. Для цього застосуємо метод математичної індукції.
Строге вкладення $Y_0 \supset Y_1$ очевидне, бо $Y_0 = X$; $Y_1 = A(X)$. Нехай $Y_{n-1} \supset Y_n$ строго. Ін'єктивний оператор A зберігає строгі вкладення, тому

$$Y_n = A(Y_{n-1}) \supset A(Y_n) = Y_{n+1}.$$

Продовжимо наші міркування. На підставі доведених строгих вкладень існують функціонали $f_n \in S(Y_n^*)$, $f_n(Y_{n+1}) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Доозначимо ці функціонали на весь X зі збереженням норми. Згідно з теоремою про компактність спряженого, оператор T^* переводить множину $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ у передкомпакт.

Доведемо тепер, що послідовність $(T^* f_n)$ – відокремлена, тобто $\inf\limits_{m\neq n\in\mathbb{N}} \|T^* f_m - T^* f_n\| > 0$. Цим ми прийдемо до суперечності з передкомпактністю і завершимо доведення теореми. Нехай $n > m$. Тоді

$$\|T^* f_m - T^* f_n\| \geqslant \|T^* f_m - T^* f_n\|_{Y_n^*} =$$

$$= \sup_{x\in B_{Y_n}} |((T^* - I^*)f_n + f_n + (I^* - T^*)f_m - f_m)(x)| =$$

$$= \sup_{x\in B_{Y_n}} |f_n((T - I)x) + f_m((I - T)x) + f_n(x) - f_m(x)| =$$

$$= \sup_{x\in B_{Y_n}} |-f_n(A(x)) + f_m(A(x)) + f_n(x) - f_m(x)| =$$

$$= \sup_{x\in B_{Y_n}} |f_n(x)| = \|f_n\|_{Y_n^*} = 1.$$

Тут використовувалось те, що $Ax \in Y_{n+1}$ при $x \in Y_n$ і функціонали f_j дорівнюють 0 на підпросторах з більшим індексом. $\square$

Наслідок. Нехай оператор вигляду $A = I - T$, де T – компактний, необоротний. Тоді оператор A неін'єктивний.

Доведення. Нехай оператор A ін'єктивний. За попереднім твердженням, він буде сюр'єктивним, а ін'єктивність і сюр'єктивність разом означають оборотність. □

Твердження 3. Якщо оператор вигляду $A = I - T$, де $T \in K(X, X)$ сюр'єктивний, то він також ін'єктивний.

Доведення. Нехай оператор A сюр'єктивний, тоді A^* ін'єктивний. Оскільки A^* – знову оператор вигляду «одиничний мінус компактний», то, згідно з попередньою теоремою, оператор A^* буде і сюр'єктивним. Отже, оператор A ін'єктивний, що й потрібно довести. □

Спектральна теорема для компактних операторів.

Нехай $T \in L(X)$ – компактний оператор у нескінченновимірному банаховому просторі. Тоді:

1. Спектр оператора T або скінченний, або складається з послідовності точок, які прямують до 0.
2. Нуль належить до спектра.
3. Якщо $\lambda \neq 0$ належить до спектра, то λ – власне число оператора; власні підпростори, відповідні ненульовим власним числам, скінченновимірні.

Доведення. Почнемо з доведення останньої властивості. Нехай $\lambda \neq 0$ належить до спектра. Тоді оператор $(T - \lambda I) = -\lambda \left(I - \lambda^{-1} T \right)$ необоротний. Отже, за наслідком із твердження 2 він не ін'єктивний, тобто існує ненульовий елемент $x \in X$, на якому $(T - \lambda I)\, x = 0$. Це й означає, що x – власний вектор, а λ – власне число оператора T.

Далі, нехай Y – власний підпростір, відповідний числу λ.
З огляду на те, що обмеження оператора T на підпростір Y – бієктивний компактний оператор, маємо потрібну скінченновимірність.

Належність нуля до спектра, тобто необоротність оператора T, випливає з того ж факту, що компактний оператор може бути оборотним лише у скінченновимірному випадку.

Доведемо, нарешті, пункт 1. Міркуватимемо від супротивного. Нехай спектр оператора T нескінченний і має ненульову граничну точку μ. Нехай, далі, $\lambda_k \neq \mu$ – це послідовність власних чисел, що прямує до $\mu \neq 0$, а x_k – відповідні власні вектори. Введемо в розгляд підпростір $Y = \overline{\mathrm{Lin}}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ і оператор $A \in L(Y)$ – обмеження на Y оператора $I - \frac{1}{\mu}T$. Зазначимо, що $Ax_k = \left(1 - \frac{\lambda_k}{\mu}\right)x_k$. Тому образ оператора A містить усі вектори x_k, тобто образ щільний в Y.

Згідно з теоремою 1, образ замкнений, тобто оператор A сюр'єктивний і, отже, бієктивний. Але це неможливо, оскільки оператор необмежений знизу:

$$\frac{\|Ax_k\|}{\|x_k\|} = \left|1 - \frac{\lambda_k}{\mu}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи

9.1. Доведіть, що компактний оператор не може бути внутрішньою точкою множини необоротних операторів в $L(X)$.

9.2. Знайдіть спектр наступного оператора: $T \in L(C[0,1])$, $Tf(t) = \int\limits_0^1 (x+t)f(x)\,dx$.

9.3. У оператора в нескінченновимірному просторі не може бути двох різних зображень у вигляді $A = \lambda I + T$ «скалярний + компактний».

9.4. Нехай T – діагональний оператор в ℓ_2 , λ_n – діагональні елементи його матриці в канонічному базисі $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ простору ℓ_2 (іншими словами, $Te_n = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, \ldots$). Довести, що T зображується у вигляді «скалярний + компактний» тоді і тільки тоді, коли послідовність (λ_n) має границю.

1. Аксіоми скалярного добутку. Простори L_2 та ℓ_2.
2. Формула квадрата суми та рівність паралелограма.
3. Нерівність Коші–Буняковського.
4. Норма, що породжена скалярним добутком. Гільбертів простір.
5. Теорема про граничний перехід під знаком скалярного добутку.
6. Ортогональне доповнення та ортопроектори.
7. Загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі.
8. Ортонормовані системи. Коефіцієнти Фур'є. Формула для ортопроектора. Нерівність Бесселя. Ряди Фур'є по ортонормованим системам, ортонормований базис, рівність Парсеваля.

Нехай H – гільбертів простір. Відображення $F\colon H \times H \to \mathbb{C}$ називається білінійною формою, якщо для будь-яких елементів x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 простору H і довільних комплексних чисел λ, μ виконуються співвідношення:

- $F(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda F(x_1, y) + \mu F(x_2, y)$;
- $F(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda} F(x, y_1) + \overline{\mu} F(x, y_2)$.

Термін «білінійна форма» тут не зовсім точний: умову лінійності за другою змінною дещо модифіковано. У деяких підручниках таку модифіковану умову називають напівлінійністю, а відповідні форми – не білінійними, а півторалінійними.

Означення. Білінійна форма називається неперервною, якщо вона неперервна за кожною змінною.

Теорема про загальний вигляд неперервної білінійної форми в гільбертовому просторі. Нехай F – неперервна білінійна форма в H. Тоді існує такий неперервний оператор A, що $F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ для будь-яких x, y з H. Оператор A визначається формою F однозначно.

Доведення. Зафіксуємо елемент $y \in H$. Тоді $F(x, y)$ – неперервний лінійний функціонал за першою змінною. За теоремою про загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі, існує такий елемент $A(y) \in H$, що $F(x, y) = \langle x, A(y) \rangle$. При цьому елемент $A(y)$ визначається за y однозначно. Нам залишилось перевірити, що відображення $y \mapsto A(y)$ лінійне і неперервне.

Лінійність.

$$\langle x, A(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle = F(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =$$

$$= \overline{\lambda_1} F(x, y_1) + \overline{\lambda_2} F(x, y_2) = \langle x, \lambda_1 A(y_1) + \lambda_2 A(y_2)\rangle .$$

З огляду на довільність елемента x це означає, що $A(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A(y_1) + \lambda_2 A(y_2)$.
Неперервність. Для будь-якого $x \in H$ вираз $F(x, y) = \langle x, Ay\rangle$ неперервний за y. Тобто для будь-якої послідовності (y_n) в H, яка прямує до нуля, маємо $\langle x, Ay_n\rangle \to 0$ $(n \to \infty)$. Це означає, що послідовність функціоналів $f_n(x) = \langle x, Ay_n\rangle$ поточково прямує до нуля. За теоремою Банаха-Штейнгауза, (f_n) – обмежена послідовність. Враховуючи, що $\|f_n\| = \|Ay_n\|$, одержуємо, що оператор A переводить будь-яку прямуючу до нуля послідовність (y_n) в обмежену. Але ця властивість, еквівалентна неперервності оператора. Теорему доведено. $\square$