Функціональний аналіз II
Тема 3. Спектральна теорія операторів
Лекції 15-16

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Критерій компактності в c_0. Для того, щоб підмножина $D \subset c_0$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб існував елемент $z \in c_0$, який покоординатно мажорує всі елементи множини D.

Критерій компактності в ℓ_p. Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Для того, щоб обмежена підмножина $D \subset \ell_p$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $n(\varepsilon)$, що всіх $x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in D$

$$\sum_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} |x_k|^p \leqslant \varepsilon.$$

У такий самий спосіб можна отримати критерій компактності в $L_1[0,1]$, спираючись на оператори усереднення E_n:

$$E_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(n \int\limits_{\Delta_{n,k}} f(t)dt \cdot \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}} \right),$$

де $\Delta_{n,k} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, 2, ..., n$.
Цей критерій буде правильним і в багатьох випадках достатньо зручним. Проте, доклавши невеликих зусиль, можна придумати елегантніше формулювання.

Всі функції $f \in L_1[0,1]$ вважатимемо визначеними не тільки на відрізку, але і на всій осі. Для цього продовжимо їх періодично з періодом 1. Для кожного $\tau \in \mathbb{R}$ означимо оператор зсуву $\mathrm{L}_\tau \colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ формулою $(\mathrm{L}_\tau f)(t) = f(t+\tau)$. Як легко бачити, L_τ – бієктивна ізометрія; зокрема, $\|L_\tau\| = 1$.

Лема. $\mathrm{L}_\tau f \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} f$ для будь-якого $f \in L_1[0,1]$.

Доведення. Оскільки оператори L_τ обмежені в сукупності, то поточкову збіжність до одиничного оператора достатньо довести не на всьому $L_1[0,1]$, а на деякій повній підмножині цього банахового простору. За таку повну підмножину візьмемо тригонометричну систему $\left\{e^{2\pi int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Маємо

$$\left\|L_\tau e^{2\pi int} - e^{2\pi int}\right\| = \int\limits_0^1 \left|e^{2\pi in(t+\tau)} - e^{2\pi int}\right| dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left|e^{2\pi in\tau} - 1\right| dt = \left|e^{2\pi in\tau} - 1\right| \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

□

Доведену лему можна переформулювати у такий спосіб: для будь-якої функції $f \in L_1[0,1]$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $\tau \in [-\delta, \delta]$ виконується нерівність $\int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)|\, dt < \varepsilon$.

Така властивість функції f називається неперервністю в середньому.

Означення. Сім'я функцій $D \subset L_1[0,1]$ називається одностайно неперервною в середньому, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої функції $f \in D$ і будь-якого $\tau \in [-\delta, \delta]$ виконується нерівність $\int\limits_0^1 |f(t+\tau) - f(t)|\, dt < \varepsilon$.

Критерій компактності в $L_1[0,1]$. Для того, щоб обмежена підмножина $D \subset L_1[0,1]$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб вона була одностайно неперервною в середньому.

Доведення. Нехай D – передкомпакт. Оскільки, згідно леми, $L_\tau \to I$ поточково, $L_\tau \to I$ рівномірно на D. Ця рівномірна збіжність – просто інший запис потрібної одностайної неперервності в середньому.
Тепер навпаки. Нехай дано одностайну неперервність в середньому множини D. Доведемо, що в цьому випадку оператори усереднення E_n рівномірно на D збігаються до одиничного оператора. Оскільки послідовність (E_n) – апроксимативна одиниця в $L_1[0,1]$, то цим буде доведено передкомпактність множини D. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ візьмемо $\delta > 0$ з означення одностайної неперервності в середньому: $\int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)|\, dt < \varepsilon$ для всіх $f \in D$ і всіх $\tau \in [-\delta, \delta]$.

Тоді для будь-якого $n > \frac{1}{\delta}$ і будь-якого $f \in D$ маємо:

$$\|E_n(f) - f\| = \int\limits_0^1 \left| \sum_{k=1}^n n \int\limits_{\Delta_{n,k}} f(x)dx \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}(t) - f(t) \right| dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left| \sum_{k=1}^n n \left(\int\limits_{\Delta_{n,k}} [f(x) - f(t)]dx \right) \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}(t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^n n \int\limits_{\Delta_{n,k}} |f(x) - f(t)| dx \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}(t) dt$$

$$= n \sum_{k=1}^n \int\limits_{\Delta_{n,k}} \int\limits_{\Delta_{n,k}} |f(x) - f(t)|\, dx dt.$$

Скориставшись тим, що всі пари $(x, t) \in \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_{n,k} \times \Delta_{n,k}$ задовольняють нерівності $0 \leqslant t \leqslant 1$, $t - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant t + \frac{1}{n}$, і зробивши заміну змінних $x \to t + \tau$, завершимо оцінку:

$$\|E_n(f) - f\| \leqslant n \int\limits_{[-1/n, 1/n]} \int\limits_{0}^{1} |f(t+\tau) - f(t)|\, dt d\tau < 2\varepsilon. \qquad \square$$

Оператор $T\colon X \to Y$ називається компактним або цілком неперервним, якщо образ $T(B_X)$ одиничної кулі простору X є передкомпактом у просторі Y. Сім'я всіх компактних операторів, які діють з простору X у простір Y, позначається $K(X, Y)$.
Оскільки будь-яка обмежена множина міститься в деякій кулі, образ будь-якої обмеженої множини під дією компактного оператора буде міститись у множині вигляду $rT(B_X)$ і, отже, буде передкомпактом.

Приклад 1. Оператор інтегрування з ядром $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$:

$$(Tf)(x) = \int_0^1 W(t,x) f(t)\, dt,$$

де ядро $W\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ неперервне за сукупністю змінних.

Для перевірки компактності оператора інтегрування, тобто передкомпактності в $C[0,1]$ множини $T(B_{C[0,1]})$, скористаємось теоремою Арцела. По-перше,

$$\|Tf\| \leqslant \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |W(t,x)| \cdot |f(t)|\, dt \leqslant \|f\| \cdot \max_{t,x\in[0,1]} |W(t,x)|,$$

що доводить обмеженість множини $T(B_{C[0,1]})$.
Для доведення одностайної неперервності множини спочатку для будь-якого $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta(\varepsilon) > 0$ так, щоб для будь-яких $x_1, x_2 \in [0,1]$ з $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ виконувалась оцінка $|W(t,x_1) - W(t,x_2)| < \varepsilon$. Нехай тепер $g \in T\left(B_{C[0,1]}\right)$ – довільний елемент.

Тоді g має вигляд $g = Tf$, де $f \in B_{C[0,1]}$. Відповідно, для будь-яких чисел $x_1, x_2 \in [0,1]$, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ маємо

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |(Tf)(x_1) - (Tf)(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |W(t, x_1) - W(t, x_2)| \cdot |f(t)| \, dt < \varepsilon \cdot \int_0^1 |f(t)| \, dt \leqslant \varepsilon \cdot \|f\| \leqslant \varepsilon,$$

тобто множина $T(B_{C[0,1]})$ одностайно неперервна. $\square$

Приклад 2. Якщо простір X нескінченновимірний, то одиничний оператор в X – це не компактний оператор. Справді, $I(B_X) = B_X$, а одинична куля нескінченновимірного простору не є передкомпактом.

Теорема 1. Множина компактних операторів $K(X, Y)$ має такі властивості:

(1) $K(X, Y)$ – лінійний підпростір в $L(X, Y)$.

(2) $K(X, Y)$ – операторний ідеал, тобто якщо $T \in K(X, Y)$, то добутки AT і TA компактні для будь-якого неперервного оператора A, для якого має сенс відповідна композиція.

(3) Множина $K(X, Y)$ замкнена в $L(X, Y)$ в сенсі збіжності за нормою.

Доведення. (1). Стійкість щодо множення на скаляр очевидна, а стійкість щодо додавання випливає зі співвідношення $(T_1 + T_2)(B_X) \subset T_1(B_X) + T_2(B_X)$ і того, що сума передкомпактів – передкомпакт.

(2). Нехай $A \in L(Z, X)$. Тоді будь-яка обмежена підмножина простору Z під дією оператора A переходить в обмежену множину, яку, у свою чергу, оператор T переводить у передкомпакт. Тому оператор TA компактний. Нехай тепер $A \in L(Y, Z)$. Тоді будь-яка обмежена підмножина простору X переходить під дією оператора T в передкомпакт, який, у свою чергу, переводиться оператором A також у передкомпакт.
(3). Нехай послідовність компактних операторів T_n збігається до оператора T. Потрібно довести компактність граничного оператора. Для цього зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і побудуємо передкомпактну ε-сітку для $T(B_X)$. Виберемо такий номер n, що $\|T - T_n\| < \varepsilon$. Розглянемо передкомпакт $K = T_n(B_X)$. Для будь-якого $x \in B_X$ маємо

$$\|Tx - T_n x\| \leqslant \|T - T_n\| \cdot \|x\| < \varepsilon.$$

Отже, K утворює шукану ε-сітку. $\square$

Наслідок. Якщо компактний оператор $A \in L(X, Y)$ оборотний, то простори X і Y скінченновимірні.

Доведення. У цьому випадку $I_X = A^{-1}A$, $I_Y = AA^{-1}$, де I_X і I_Y – одиничні оператори в просторах X і Y відповідно. Отже, за властивістю (2), I_X і I_Y – компактні оператори, що для нескінченновимірних X і Y неможливо. □

Наступна теорема показує, що зазвичай компактні оператори можуть бути апроксимовані за нормою скінченновимірними операторами. Теорія компактних операторів народилась із досліджень Фредгольма (I. Fredholm) з теорії інтегральних рівнянь. У цих дослідженнях вивчення інтегральних операторів базувалось на наближенні цих операторів скінченновимірними. Сучасний виклад, загальніший і технічно менш складний, базується на інших ідеях, які належать насамперед Ф. Рісу.

Теорема 2. Нехай Y – простір з властивістю поточкової апроксимації (наприклад, простір з базисом), $T \in K(X, Y)$ і оператори S_n утворюють апроксимативну одиницю в Y. Тоді оператори $T_n = S_n T$ утворюють послідовність скінченновимірних операторів, збіжну за нормою до оператора T.

Доведення. Оператори T_n скінченновимірні, оскільки скінченновимірні оператори S_n. Крім того, послідовність операторів (S_n) обмежена і поточково збігається до тотожного оператора I на передкомпакті $T(B_X)$, отже, справджується і рівномірна збіжність на $T(B_X)$. Отже,

$$\|T_n - T\| = \sup_{x \in B_X} \|T_n x - Tx\| = \sup_{x \in B_X} \|(S_n - I)Tx\| =$$

$$= \sup_{y \in T(B_X)} \|(S_n - I)y\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

□

Теорема Шаудера про компактність спряженого оператора. Нехай X, Y – банахові простори, $T \in K(X, Y)$. Тоді $T^* \in K(Y^*, X^*)$.

Доведення. Згідно з означенням, нам потрібно довести передкомпактність множини $G = T^*(B_{Y^*})$ в X^*. Введемо позначення $K = \overline{T(B_X)}$. За умовою, K – компакт в Y. Розглянемо простір $C(K)$ неперервних функцій на цьому компакті та відображення $U\colon G \to C(K)$, яке діє за правилом $U(T^*f) = f|_K$. Доведемо, що U – ізометрія. Нехай T^*f_1, T^*f_2 – два довільних елемента множини G. Маємо

$$\|T^*f_1 - T^*f_2\| = \|T^*(f_1 - f_2)\| = \sup_{x \in B_X} |T^*(f_1 - f_2)x| =$$
$$= \sup_{x \in B_X} |(f_1 - f_2)(Tx)| = \sup_{y \in T(B_X)} |(f_1 - f_2)y| =$$
$$= \sup_{y \in K} |(f_1 - f_2)y| = \|f_1|_K - f_2|_K\|_{C(K)}.$$

Цією оцінкою доведено також і коректність означення відображення U: якщо $T^*f_1 = T^*f_2$, то

$$\|U(T^*f_1) - U(T^*f_2)\| = \|f_1|_K - f_2|_K\| = 0,$$

тобто $U(T^*f_1) = U(T^*f_2)$.
З огляду на ізометричність відображення U передкомпактність множини G рівносильна передкомпактності в $C(K)$ його образу $U(G) = \{f|_K : f \in B(Y^*)\}$. Множина $U(G)$ рівномірно обмежена, оскільки для будь-якого $f \in B(Y^*)$

$$\|f|_K\|_{C(K)} = \sup_{x \in B_X} |f|_K(Tx)| \leqslant \|f\| \cdot \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leqslant \|T\|.$$

З іншого боку, всі елементи множини $U(G)$ – це функції, які задовольняють умову Ліпшиця зі сталою 1:

$$|f|_K(y_1) - f|_K(y_2)| \leqslant |f(y_1) - f(y_2)| \leqslant \|f\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leqslant \|y_1 - y_2\|.$$

Для завершення доведення залишилось застосувати теорему Арцела. $\square$

Вправи

8.1. Нехай X, Y – банахові простори, $\{y_k\}_{k=1}^n \subset Y$ і $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ – скінченні набори елементів і функціоналів відповідно. Означимо оператор $T \in L(X, Y)$, $T = \sum_{k=1}^n f_k \otimes y_k$ формулою $Tx = \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k$. Доведіть, що T – скінченновимірний оператор, і що будь-який оператор скінченного рангу зображується у подібний спосіб, причому і вектори $\{y_k\}_{k=1}^n$, і функціонали $\{f_k\}_{k=1}^n$ в цьому зображенні можуть бути вибрані лінійно незалежними.

8.2. Нехай T – оператор інтегрування з ядром (приклад 1), причому ядро має вигляд $W(t, \tau) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j(\tau)$. Доведіть, що такий оператор має скінченний ранг.

8.3. Доведіть, що оператор інтегрування з ядром із прикладу 1 може бути наближений з будь-якою точністю операторами інтегрування з ядром, які мають скінченний ранг.

8.4. Доведіть, що якщо оператор задано матрицею, яка має лише скінченну кількість ненульових елементів, то такий оператор має скінченний ранг. Наведіть приклад такої матриці з нескінченною кількістю ненульових елементів, щоб вона визначала скінченновимірний оператор у просторі ℓ_2.

8.5. Доведіть скінченновимірність оператора $T \in L(C[0,1])$,

$$(Tf)(t) = \int_0^1 (x+t) f(x)\, dx.$$

8.6. Нехай $T \in L(X)$ – скінченновимірний оператор. Тоді образ оператора T – скінченновимірний інваріантний підпростір. Оскільки кожен власний вектор з ненульовим власним числом лежить в $T(X)$, задача пошуку ненульових власних чисел зводиться до вивчення дії оператора T у підпросторі $T(X)$. Спираючись на ці міркування, знайдіть усі ненульові власні числа і відповідні власні вектори оператора з попередньої вправи.