Функціональний аналіз II
Тема 3. Спектральна теорія операторів
Лекції 13-14

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Комплексне число λ називається точкою спектра оператора $T \in L(X)$, якщо оператор $T - \lambda I$ необоротний. Множина таких чисел називається спектром оператора T і позначається $\sigma(T)$.

Резольвентою оператора $T \in L(X)$ називається функція

$$R_T \colon \mathbb{C} \backslash \sigma(T) \to L(X),$$

яка визначається формулою $R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$.

Твердження. Резольвента аналітична в своїй області визначення і прямує до нуля на нескінченності.

Теорема Ліувілля для цілих функцій зі значеннями в банаховому просторі. Якщо функція $F \colon \mathbb{C} \to E$ аналітична і обмежена, то вона стала.

Теорема про непорожність спектра. Спектр будь-якого оператора $T \in L(X)$ непорожній.

Доведення. Будемо міркувати методом від супротивного. Нехай спектр оператора $T \in L(X)$ порожній. Тоді областю визначення резольвенти R_T є вся комплексна площина. Оскільки резольвента неперервна і прямує до 0 на ∞, то вона обмежена у всій площині. А оскільки вона аналітична в $\mathbb{C}$, то ми потрапляємо в умови теореми Ліувілля. Тому $R_T = \text{const}$. Але $\lim\limits_{\lambda \to \infty} R_T(\lambda) = 0$, тому $R_T(\lambda) \equiv 0$, що суперечить означенню резольвенти: її значеннями можуть бути тільки оборотні оператори. $\square$

У курсі лінійної алгебри оператори часто визначаються своїми матрицями. Поняття матриці оператора має сенс і для операторів у нескінченновимірному просторі (зрозуміло, із заміною скінченних матриць на нескінченні).

Нехай X, Y – банахові простори, оператор $A \in L(X, Y)$, $\{e_n\}$ і $\{g_n\}$ – базиси в X і Y відповідно. Оператор задано, якщо відомі образи Ae_n всіх елементів базису. Позначимо через g_n^* координатні функціонали базису $\{g_n\}$ в Y. Кожен елемент простору Y зображується у вигляді ряду $y = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(y)\, g_n$, зокрема, $Ae_m = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(Ae_m)\, g_n$. Отже, числа $a_{n,m} = g_n^*(Ae_m)$ цілком визначають оператор A.

Означення. Набір чисел $a_{n,m} = g_n^*(Ae_m)$, $n, m \in \mathbb{N}$ називається матрицею оператора A в базисах $\{e_n\}$, $\{g_n\}$. У цих позначеннях $Ae_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} g_m$, тобто n-ний стовпчик матриці A складається з коефіцієнтів розкладу елемента Ae_n за базисом $\{g_m\}$.

Вправи

7.1. Нехай числа $a_{n,m}$ утворюють матрицю оператора A в базисах $\{e_n\}$, $\{g_n\}$ і $x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m$. Тоді

$$Ax = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} x_m g_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m g_n \right).$$

7.2. Нехай в канонічному базисі простору ℓ_2 матриця оператора $T \in L(\ell_2)$ має діагональний вигляд. Доведіть, що спектр такого оператора збігається із замиканням множини діагональних елементів матриці.

7.3. Використовуючи попередню вправу, доведіть, що будь-яка обмежена непорожня замкнена множина комплексних чисел є спектром деякого оператора.

7.4. Нехай в умовах попередньої вправи всі діагональні елементи матриці оператора T різні. Опишіть всі оператори, які комутують із T.

Так само, як і в довільному повному метричному просторі, для замкненої підмножини A банахового простору X такі умови еквівалентні:

- A – компактна множина;
- A – передкомпакт;
- з будь-якої послідовності елементів множини A можна виділити збіжну підпослідовність.

Проте в банаховому просторі є структури, що відсутні в довільному повному метричному просторі. Це операції суми, множення на скаляр і породжені цими операціями поняття вимірності, лінійного підпростору, лінійного оператора і т. д. На зв'язку передкомпактності з цими лінійними структурами ми зупинимось детальніше.

Теорема 1. Передкомпактність стійка щодо лінійних операцій:

(a) якщо A, B – передкомпакти в нормованому просторі, то $A + B$ – передкомпакт;

(b) якщо $A \subset X$ – передкомпакт, $T \in L(X, Y)$, то $T(A)$ – передкомпакт в Y;

(c) зокрема, передкомпактність зберігається при множенні на скаляр.

Доведення. (a) Нехай A_1, B_1 – скінченні $\frac{\varepsilon}{2}$-сітки множин A і B відповідно. Тоді $A_1 + B_1$ – скінченна ε-сітка множини $A + B$.
(b) Якщо A_1 – скінченна $\frac{\varepsilon}{\|T\|}$-сітка множини A, то $T(A_1)$ – скінченна ε-сітка множини $T(A)$.
(c) Множення на фіксований скаляр – неперервний лінійний оператор □

Теорема 2. Для обмеженої підмножини A нормованого простору X такі умови еквівалентні:

(1) A – передкомпакт;

(2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченновимірний підпростір $Y \subset X$, яка утворює ε-сітку для A.

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Нехай A_1 – скінченна ε-сітка множини A. Тоді $\mathrm{Lin}\, A_1$ – скінченновимірний підпростір, який утворює шукану ε-сітку.
$(2) \Rightarrow (1)$. Нехай підпростір $Y \subset X$ скінченновимірний і є ε-сіткою для A. Позначимо через r таке число, що $A \subset rB_X$. Розглянемо множину $(r+\varepsilon)B_Y$. Це обмежена підмножина скінченновимірного простору Y, отже, вона – передкомпакт. Оскільки Y – ε-сітка для A, для будь-якого $x \in A$ існує $y \in Y$ з $\|x - y\| < \varepsilon$. Але y лежить в $(r + \varepsilon)B_Y$:

$$\|y\| \leqslant \|x\| + \|y - x\| < r + \varepsilon.$$

Отже, множина $(r+\varepsilon)B_Y$ – це теж ε-сітка для A. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми знайшли для A передкомпактну ε-сітку, що означає передкомпактність множини A. □

Теорема 3. Опукла оболонка передкомпакта – знову передкомпакт.

Доведення. Скористаємось попередньою теоремою. Нехай A – передкомпакт, підпростір $Y \subset X$ скінченновимірний і утворює ε-сітку для A. Доведемо, що Y – ε-сітка і для conv$A$. Нехай $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ – довільна опукла комбінація елементів x_k множини A. Оскільки Y – це ε-сітка для A, можна вибрати $y_k \in Y$ з $\|x_k - y_k\| < \varepsilon$. Розглянемо $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \in Y$. Маємо

$$\|x-y\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - y_k)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|x_k - y_k\| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \varepsilon.$$

Тобто Y – справді ε-сітка для conv$A$. □

Теорема 4. Нехай X, Y – банахові простори, $T_n, T \in L(X, Y)$ і послідовність операторів (T_n) поточково збігається до T. Тоді на будь-якому передкомпакті $A \subset X$ послідовність (T_n) збігається до T рівномірно.

Доведення. За теоремою Банаха-Штейнгауза норми всіх операторів T_n обмежені зверху деякою сталою $C < \infty$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо для передкомпакта A скінченну $\frac{\varepsilon}{4C}$-сітку B. Множина B скінченна, і в кожній її точці y є відповідна збіжність $T_n y \xrightarrow[n\to\infty]{} Ty$. Тому можна вибрати такий номер m, що для будь-якого $n > m$ в кожній точці $y \in B$ виконується нерівність $\|(T_n - T)y\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Оскільки B – це $\frac{\varepsilon}{4C}$-сітка для A, то для будь-якого $x \in A$ існує $y \in B$ з $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{4C}$. Отже, при будь-якому $n > m$ для будь-якого $x \in A$ маємо оцінку:

$$\|(T_n - T)x\| \leqslant \|(T_n - T)y\| + \|(T_n - T)(x - y)\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \|T_n - T\| \cdot \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.$$

Цим доведено рівномірну збіжність на A. $\square$

До наступної теореми потрібно поставитись як до важливого попередження: у нескінченновимірному просторі обмежені множини не обов'язково є передкомпактами!

Теорема 5 (Ф. Ріс). Одинична куля нескінченновимірного нормованого простору не може бути передкомпактом.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon \in (0, 1)$. Покажемо, що ніякий скінченновимірний простір не може бути ε-сіткою множини B_X. Це означатиме (теорема 2), що B_X – не передкомпакт.

Нехай $Y \subset X$ – довільний скінченновимірний підпростір. Оскільки $Y \neq X$, фактор-простір X/Y нетривіальний. Виберемо елемент $[x]$ простору X/Y, який задовольняє умову $\varepsilon < \|[x]\| < 1$. За означенням норми у фактор-просторі, існує представник $z \in [x]$ з $\|z\| < 1$. Тоді $z \in B_X$, але водночас

$$\inf_{y \in Y} \|z - y\| = \|[z]\| = \|[x]\| > \varepsilon,$$

тобто Y не є ε-сіткою для B_X. □

Неперервний оператор називається скінченновимірним або оператором скінченного рангу, якщо його образ скінченновимірний. Послідовність операторів $T_n \in L(X)$ називається апроксимативною одиницею, якщо всі оператори T_n скінченновимірні і $T_n \to I$ поточково. Простір X має властивість поточкової апроксимації, якщо в X існує апроксимативна одиниця.

Приклади

1. Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – базис банахового простору X. Тоді оператори S_n частинних сум утворюють апроксимативну одиницю. Справді, нехай $x \in X$ – довільний елемент, $x = \sum_{k=1}^\infty a_k e_k$ – його розклад за базисом. Тоді $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ і $S_n(x) \to x$ $(n \to \infty)$. Відповідно, будь-який простір з базисом має властивість поточкової апроксимації.

2. Для будь-якої функції $f \in C[0,1]$ позначимо через $L_n(f)$ кусково-лінійну неперервну функцію, яка збігається з f в точках 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ..., 1 і лінійну на відрізках вигляду $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Так визначені оператори L_n утворюють апроксимативну одиницю в просторі $C[0,1]$.

3. Введемо позначення $\Delta_{n,k} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Для будь-якої функції $f \in L_1[0,1]$ означимо

$$E_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(n \int\limits_{\Delta_{n,k}} f(t)dt \cdot \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}} \right).$$

Іншими словами, $E_n(f)$ – кусково-стала функція, яка набуває на кожному з $\Delta_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ значення, що дорівнює середньому значенню функції f на відрізку $\Delta_{n,k}$. Так визначені оператори E_n (що називаються операторами усереднення) утворюють апроксимативну одиницю в просторі $L_1[0,1]$.

Теорема 6. Нехай X – банахів простір, що має властивість поточкової апроксимації, і послідовність $T_n \in L(X)$ – деяка фіксована апроксимативна одиниця у просторі X. Тоді для будь-якої множини $D \subset X$ такі дві умови еквівалентні:

(1) D – передкомпакт;

(2) множина D обмежена, і послідовність (T_n) рівномірно збігається на D до одиничного оператора.

Доведення. Імплікація $(1) \Rightarrow (2)$ – це прямий наслідок з теореми 4. Доведемо зворотну імплікацію. Нехай $T_n \rightrightarrows I$ на D при $n \to \infty$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $m = m(\varepsilon)$, що $\|T_m x - x\| < \varepsilon$ для всіх $x \in D$. Це означає, зокрема, що підпростір $T_m(X)$ – це ε-сітка для D. Оскільки за означенням апроксимативної одиниці всі T_n – оператори скінченного рангу, підпростір $T_m(X)$ скінченновимірний. Для завершення доведення залишається застосувати теорему 2. □

Оскільки в нескінченновимірних просторах вже не виконується знайомий з аналізу скінченновимірний критерій компактності (замкненість + обмеженість), перевірка компактності часто стає нетривіальною задачею. У розв'язанні цієї задачі допомагає знання специфіки простору, в якому розглядається потенційний компакт. У кожному конкретному просторі виникає свій критерій компактності. Один з таких критеріїв – теорема Арцела – вже знайомий читачеві. Як ми зазначали, у просторі $C(K)$ неперервних функцій на метричному компакті передкомпактність множини еквівалентна одночасному виконанню двох умов: рівномірної обмеженості й одностайної неперервності. Решта класичних критеріїв компактності спираються на теорему, наведену в попередньому параграфі. Схема одержання таких критеріїв досить проста: потрібно вибрати (якомога вдаліше) апроксимативну одиницю і розписати детально, що означає рівномірна збіжність на множині.

Критерій компактності в c_0. Для того, щоб підмножина $D \subset c_0$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб існував елемент $z \in c_0$, який покоординатно мажорує всі елементи множини D.

Доведення. Оскільки і передкомпактність, й існування мажоранти імплікують обмеженість, доведення достатньо проводити для обмежених множин. Розглянемо послідовність операторів $P_n \in L(c_0)$, які діють за правилом

$$P_n(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, ..., x_n, 0, 0, 0, ...).$$

Очевидно, P_n утворюють апроксимативну одиницю в c_0. Згідно з теоремою з попереднього пункту, нам потрібно довести, що для обмеженої множини D існування мажоранти $z \in c_0$ еквівалентне рівномірній збіжності на D послідовності P_n до оператора I.

Рівномірна збіжність P_n до I на D означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n(\varepsilon)$, що для будь-якого вектора $x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in D$ і будь-якого $n \geqslant n(\varepsilon)$ виконується нерівність $\|x - P_n x\| \leqslant \varepsilon$. Розписуючи означення норми в c_0 і означення P_n, одержуємо еквівалентне переформулювання: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n(\varepsilon)$, що для будь-якого $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\sup \left\{ \left| x_j \right| : x = (x_1, x_2, \ldots) \in D, j \geqslant n+1 \right\} \leqslant \varepsilon.$$

Якщо ввести позначення

$$y_n = \sup \left\{ \left| x_j \right| : x = (x_1, x_2, \ldots) \in D, j \geqslant n \right\},$$

остання умова означає, що $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто вектор $y = (y_1, \ldots, y_m, \ldots)$ – елемент простору c_0.

Залишається зазначити, що прямування y_n до нуля еквівалентне існуванню шуканої мажоранти. Справді, вектор $y = (y_1, \dots, y_m, \dots)$ – елемент простору c_0 і $y_n \geqslant |x_n|$ для будь-якого вектору $x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \in D$, тобто y – це спільна мажоранта всіх елементів множини D.

Навпаки, якщо у D існує мажоранта $z = (z_1, z_2, \dots) \in c_0$, то

$$y_n \leqslant \sup\left\{ \left|z_j\right| : j \geqslant n \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Критерій компактності в ℓ_p. Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Для того, щоб обмежена підмножина $D \subset \ell_p$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $n(\varepsilon)$, що $\sum\limits_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} |x_k|^p \leqslant \varepsilon$ для будь-якого $x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in D$.