Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 23

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Лема 1. Нехай X – топологічний векторний простір, $Y \subset X$ – замкнений підпростір скінченної ковимірності. Тоді, якщо функціонал $f \in X'$ розривний, то обмеження функціонала f на Y також розривне.

Лема 2. Нехай X – топологічний векторний простір, $f \in X'$ – розривний функціонал. Тоді для довільного скаляра a гіперплощина $f_{=a} = \{x \in X : f(x) = a\}$ щільна в X.

Теорема. Нехай X – секвенційно повний локальний опуклий простір з топологією, яка задається послідовністю напівнорм

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant \dots.$$

Далі, нехай послідовність лінійних функціоналів $f_n \in X^*$ має таку властивість: для довільного $n \in \mathbb{N}$ функціонал f_n розривний відносно p_n (тобто розривний в топології, породженій однією напівнормою p_n), але неперервний відносно p_{n+1} і, відповідно, неперервний відносно всіх p_k з $k > n$. Тоді для довільної послідовності скалярів a_n існує такий елемент $x \in X$, що $f_n(x) = a_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Доведення. Шуканий елемент $x \in X$ побудуємо у вигляді суми ряду $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, елементи якого задовольняють такі умови:

(a) $p_n(x_n) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$;

(b) $f_n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) = a_n$;

(c) $f_n(x_k) = 0$ для $k > n$.

При цьому умова (a) забезпечує абсолютну збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Справді, якщо p – неперервна напівнорма, то її одинична куля повинна містити деяку з куль напівнорм p_n. Отже, починаючи з деякого m, для всіх $n \geqslant m$ виконується оцінка $p \leqslant Cp_n$. Відповідно,

$$\sum_{k=m}^{\infty} p(x_k) < C \sum_{k=m}^{\infty} p_k(x_k) < \infty.$$

Тому елемент $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ існує. Умови ж (b) та (c) забезпечують потрібну рівність $f_n(x) = a_n$.

Отже, нам потрібно лише побудувати послідовність (x_n), яка має властивості (a)–(c). Побудову будемо проводити рекурентно.

Функціонал f_1 є розривним відносно напівнорми p_1, тому гіперплощина $X_1 = \{x \in X : f_1(x) = a_1\}$ p_1-щільна в X. Зокрема, X_1 перетинає кулю $B_1 = \left\{x \in X : p_1(x) < \frac{1}{2}\right\}$. За x_1 візьмемо довільний елемент множини $X_1 \cap B_1$.

Нехай елементи $x_1, \ldots, x_{n-1}$ вже побудовані, опишемо побудову вектора x_n.

Розглянемо підпростір скінченної ковимірності $Y = \bigcap_{k=1}^{n-1} \operatorname{Ker} f_k$. Оскільки функціонали f_k p_n-неперервні для $k < n$, то Y – p_n-замкнений підпростір. За лемою 1, обмеження функціонала f_n на Y є розривним відносно напівнорми p_n. Тому гіперплощина

$$X_n = \left\{ y \in Y : f_n(y) = a_n - \sum_{k=1}^{n-1} f_n(x_k) \right\}$$

є щільною в Y з точки зору напівнорми p_n. Відповідно, куля $B_n = \{x \in Y : p_n(x) < 2^{-n}\}$ перетинає гіперплощину X_n. За x_n візьмемо довільний елемент множини $X_n \cap B_n$. Те, що вектор x_n належить до множин B_n, X_n та Y забезпечує виконання умов (a), (b) і (c) відповідно.