Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 22

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Означення секвенційної повноти.

(на дошці)

Означення збіжного ряду. Властивості.

(на дошці)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в локально опуклому просторі X називається абсолютно збіжним, якщо $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) < \infty$ для довільної неперервної напівнорми p на X.

Твердження. В секвенційно повному локально опуклому просторі будь-який абсолютно збіжний ряд збігається.
Доведення. (на дошці)

Лема 1. Нехай X – топологічний векторний простір, $Y \subset X$ – замкнений підпростір скінченної ковимірності. Тоді, якщо функціонал $f \in X'$ розривний, то обмеження функціонала f на Y також розривне.

Доведення. Використаємо властивості фактор-простору топологічного векторного простору. Припустимо, що обмеження функціонала f на Y неперервне. Тоді $\tilde{Y} = Y \cap \operatorname{Ker} f$ – замкнений підпростір скінченної ковимірності. Задамо на $X/\tilde{Y}$ функціонал $\tilde{f}$ за таким правилом $\tilde{f}(qx) = f(x)$, де $q\colon X \to X/\tilde{Y}$ – фактор-відображення. За означенням ковимірності, фактор-простір $X/\tilde{Y}$ скінченновимірний, а це означає, що функціонал $\tilde{f}$ неперервний на $X/\tilde{Y}$. Отже, f неперервний як композиція функціонала $\tilde{f}$ і фактор-відображення. $\square$

Лема 2. Нехай X – топологічний векторний простір, $f \in X'$ – розривний функціонал. Тоді для довільного скаляра a гіперплощина $f_{=a} = \{x \in X : f(x) = a\}$ щільна в X.

Доведення. Щільність ядра функціонала f ми знаємо. Гіперплощина $f_{=a}$ отримується з $\operatorname{Ker} f$ паралельним перенесенням на довільний фіксований вектор $y \in f_{=a}$. $\square$

Теорема. Нехай X – секвенційно повний локальний опуклий простір з топологією, яка задається послідовністю напівнорм

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant \dots .$$

Далі, нехай послідовність лінійних функціоналів $f_n \in X^*$ має таку властивість: для довільного $n \in \mathbb{N}$ функціонал f_n розривний відносно p_n (тобто розривний в топології, породженій однією напівнормою p_n), але неперервний відносно p_{n+1} і, відповідно, неперервний відносно всіх p_k з $k > n$. Тоді для довільної послідовності скалярів a_n існує такий елемент $x \in X$, що $f_n(x) = a_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Застосування - на дошці.