Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 21

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай X – лінійний простір, X_1 – підпростір в X. Введемо таке відношення еквівалентності на X: $x \sim y$, якщо $x - y \in X_1$. Класом еквівалентності елемента x є множина

$$[x] = x + X_1 = \{x + y : \ y \in X_1\}.$$

Множина таких класів еквівалентності, наділена операціями

$$\lambda[x] = [\lambda x],$$

$$[x_1] + [x_2] = [x_1 + x_2],$$

називається фактор-простором простору X за підпростором X_1 і позначається X/X_1.

З фактор-простором тісно пов'язаний оператор q – фактор-відображення простору X на $X/X_1 : q(x) = [x]$. Лінійність оператора фактор-відображення випливає із означення лінійних операцій на фактор-просторі. Оператор фактор-відображення сюр'єктивний.

Нехай X – топологічний векторний простір, $Y \subset X$ – підпростір, $q\colon X \to X/Y$ – фактор-відображення. Визначимо топологію τ на X/Y: множину $U \subset X/Y$ назвемо відкритою тоді і тільки тоді, коли $q^{-1}(U)$ – відкрита множина. Тоді

- Для будь-якої відкритої множини $V \subset X$ її образ $q(V)$ – відкрита множина.
- τ – топологія, яка узгоджується з лінійною структурою;
- τ – найсильніша серед всіх топологій на X/Y, в яких неперервне фактор-відображення;
- якщо підпростір Y замкнений, то X/Y відокремлюваний, навіть якщо початковий простір X невідокремлюваний.

Підпростір Y лінійного простору X має ковимірність n ($\operatorname{codim}_X Y = n$), якщо вимірність фактор-простору X/Y дорівнює n.

- $\operatorname{codim}_X Y \leqslant n$ тоді і тільки тоді, коли існують n векторів $\{x_k\}_1^n \subset X$ таких, що $\operatorname{Lin}\{x_1, \ldots, x_n, Y\} = X$.
- $\operatorname{codim}_X Y = n$ тоді і тільки тоді, коли існує підпростір Z в X такий, що $\dim Z = n$, $Z \cap Y = \{0\}$, $Z + Y = X$.
- $\operatorname{codim}_X Y \leqslant n$ тоді і тільки тоді, коли Y має ненульовий перетин з будь-яким підпростором Z в X вимірності, яка більша або дорівнює $n+1$.
- $\operatorname{codim}_X Y = n$ тоді і тільки тоді, коли на X існує такий лінійно незалежний набір з n лінійних функціоналів, що перетин їхніх ядер збігається з Y.
- Нехай X – топологічний векторний простір, $Y \subset X$ – замкнений підпростір з $\operatorname{codim}_X Y = n$. Тоді існує такий лінійно незалежний набір з n НЕПЕРЕРВНИХ лінійних функціоналів, що перетин їхніх ядер збігається з Y.