# Додаткові розділи функціонального аналізу

## Лекція 20

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

# Зміст лекції

Топологічний векторний простір $X$ називається локально опуклим, якщо для довільного околу нуля $U$ існує опуклий окіл нуля $V$, який міститься в $U$. Іншими словами, простір $X$ локально опуклий, якщо система $\mathfrak{N}_0$ околів нуля має базу, що складається з опуклих множин.

Теорема 1. Кожен опуклий окіл нуля $U$ містить опуклий збалансований відкритий окіл нуля. Зокрема, в локально опуклому просторі існує база околів нуля, що складається з опуклих збалансованих відкритих множин.

Доведення. Нехай $V \subset U$ – відкритий збалансований окіл нуля. Тоді $\operatorname{conv} V \subset U$. Доведемо, що $\operatorname{conv} V$ – опуклий збалансований відкритий окіл нуля.

Опуклість є очевидною. Далі, $\operatorname{conv} V \supset V$, отже, $\operatorname{conv} V$ – окіл нуля. Перевіримо збалансованість. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}_1$, тобто $|\lambda| \leqslant 1$. Тоді $\lambda V \subset V$ (з огляду на збалансованість $V$) і $\lambda \operatorname{conv} V = \operatorname{conv}(\lambda V) \subset \operatorname{conv} V$. Нарешті, перевіримо відкритість. Оскільки $V$ – відкрита множина, а операції множення на скаляр і суми множин не виводять за межі класу відкритих множин, всі множини вигляду $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k V$, де $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k > 0$ і $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, відкриті. Водночас $\operatorname{conv} V$ – це об'єднання множин вигляду $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k V$. $\square$

Функція $p\colon X \to \mathbb{R}$ називається напівнормою, якщо $p(x) \geqslant 0, p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ для довільного $x \in X$ і довільного скаляра $\lambda$ і $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для довільних $x, y \in X$. Відмінність напівнорми від норми полягає в тому, що $p(x)$ може дорівнювати нулю і для деяких ненульових $x \in X$.

Так само, як і для норми, одиничною кулею напівнорми $p$ називається множина $B_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$. $B_p$ – це опукла збалансована множина. Напівнорма $p$ може бути відновлена за її одиничною кулею за допомогою функціонала Мінковського: $p(x) = \varphi_{B_p}(x) = \inf\{t > 0 : \ x \in tB_p\}$.

Теорема 2. Напівнорма $p$ на топологічному векторному просторі $X$ є неперервною тоді і тільки тоді, коли $B_p$ – окіл нуля.

Доведення. $B_p = p^{-1}(-1, 1)$ – прообраз відкритої множини. Якщо $p$ неперервна, то цей прообраз відкритий. Навпаки, нехай $B_p$ – окіл нуля, доведемо неперервність напівнорми. Для будь-якого $x \in X$ і довільного $\varepsilon > 0$ нам потрібно знайти такий окіл $U$ точки $x$, що $p(U) \subset (p(x) - \varepsilon, p(x) + \varepsilon)$. Таким околом є $U = x + \varepsilon B_p$. Справді, будь-яка точка $y \in U$ має вигляд $y = x + \varepsilon z$, де $p(z) < 1$. Отже, за нерівністю трикутника, $p(x) - \varepsilon < p(y) < p(x) + \varepsilon$. $\square$

Нехай $G$ – сім'я напівнорм на лінійному просторі $X$. Через $\mathfrak{D}_G$ позначимо систему всіх скінчених перетинів множин вигляду $rB_p$, де $p \in G$ і $r > 0$. Локально опуклою топологією, породженою сім'єю напівнорм $G$, називається топологія $\tau_G$ на $X$, де базою околів нуля є $\mathfrak{D}_G$, а базою околів точки $x \in X$ є, відповідно, сім'я множин вигляду $x + U$, де $U \in \mathfrak{D}_G$.

Сім'я напівнорм $G$ називається невиродженою, якщо для довільного $x \in X \backslash \{0\}$ існує $p \in G$ з $p(x) \neq 0$.

Дуже зручний частковий випадок – це топологія, що породжена зростаючою послідовністю напівнорм $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots$.

Послідовність $x_n \in X$ збігається до $x \in X$ в топологіїї, породженій сім'єю напівнорм $G$, якщо $p(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для всіх $p \in G$.

Теорема 3. Нехай $X$ – топологічний векторний простір, $f$ – лінійний функціонал на $X$. Для неперервності функціонала $f$ необхідно і досить існування такої неперервної напівнорми $p$ на $X$, що $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всіх $x \in X$.

Доведення. Нехай $f$ неперервний. Тоді $p(x) = |f(x)|$ є шуканою напівнормою. Навпаки, нехай $|f(x)| \leqslant p(x)$, і $p$ – неперервна напівнорма. Тоді $f$ обмежений в околі нуля $B_p$. $\square$

Теорема 4 (теорема Гана-Банаха в локально опуклих просторах). Нехай $f$ – лінійний неперервний функціонал, заданий на підпросторі $Y$ локально опуклого простору $X$. Тоді $f$ можна продовжити на весь $X$ зі збереженням лінійності і неперервності.

Доведення. За умовою, множина $U = \{y \in Y : |f(y)| < 1\}$ – це відкритий окіл нуля в $Y$. За означенням індукованої топології на підпросторі, існує $V$ – окіл нуля в $X$, для якого $U \supset V \cap Y$. Оскільки простір $X$ локально опуклий, окіл $V$ можна вибрати у вигляді одиничної кулі деякої неперервної напівнорми $p$, яка задана на $X$. За побудовою для довільного $y \in Y$, якщо $p(y) < 1$, то $y \in U$ і $|f(y)| < 1$. Тобто $|f(y)| \leqslant p(y)$ скрізь на $Y$.

Далі треба розмірковувати так само, як і для нормованих просторів, тільки замість норми використовувати напівнорму $p$. $\square$

Приклад 1. Простір $\mathcal{H}(D)$ голоморфних функцій у відкритій області $D \subset \mathbb{C}$ з локально опуклою топологією, породженою сім'єю всіх напівнорм вигляду

$$p_K(f) = \max_{z \in K} |f(z)|,$$

де $K$ – компакт в $D$.

Приклад 2. Простір $C^\infty[0,1]$ всіх нескінченно диференційовних функцій на $[0,1]$, на якому визначено локально опуклу топологію, яка породжена сім'єю напівнорм

$$p_n(f) = \max_{t \in [0,1]} \left| f^{(n)}(t) \right|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Приклад 3. $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ( $\mathbb{C}^\mathbb{N}$) – простір всіх нескінчених векторів $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ на якому визначено локально опуклу топологію, яка породжена сім'єю напівнорм

$$p_n(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$