Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 19

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай X – топологічний векторний простір. Будемо говорити, що окіл нуля $U \in \mathfrak{N}_0$ поглинає множину $A \subset X$, якщо існує таке число $t > 0$, що $A \subset tU$. Множина $A \subset X$ називається обмеженою, якщо вона поглинається кожним околом нуля.

Теорема. Система обмежених підмножин топологічного векторного простору X має такі властивості:

(a) Нехай $A \subset X$ – обмежена множина. Тоді для довільного околу $U \in \mathfrak{N}_0$ існує таке число $N > 0$, що $A \subset tU$ для довільного $t \geqslant N$.

(b) Об'єднання скінченної кількості обмежених множин – знову множина обмежена.

(c) Довільний компакт K в X обмежений.

Доведення. (a) Нехай $V \in \mathfrak{N}_0$ – збалансований окіл, який міститься в U. Виберемо таке $N > 0$, що $A \subset NV$. Тоді для довільного $t \geqslant N$ маємо

$$A \subset NV = t\left(\frac{N}{t}V\right) \subset tV \subset tU.$$

(b) Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – обмежені множини, U – окіл нуля. Згідно з (a), для кожного з A_k існує таке N_k, що $A_k \subset tU$ для всіх $t > N_k$. Покладемо $N = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} N_k$. Тоді для довільного $t \geqslant N$ всі включення $A_k \subset tU$ виконуються одночасно, тобто $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset tU$.

(c) Для збалансованого відкритого околу нуля U скористатися формулою

$$K \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$$

та обрати скінченне підпокриття. □

У цьому розділі X, E – топологічні векторні простори.

Теорема 1. Лінійний оператор $T\colon X \to E$ неперервний тоді і тільки тоді, коли він неперервний в точці $x = 0$.

Доведення. Неперервний оператор є неперервним в усіх точках, зокрема, в нулі. З іншого боку, нехай оператор T неперервний в нулі, доведемо, що T неперервний у будь-якій точці $x_0 \in X$. Нехай V – довільний окіл точки Tx_0 в E. Тоді $V - Tx_0$ – окіл нуля в E. За умовою, $T^{-1}(V - Tx_0)$ – окіл нуля в X. Враховуючи лінійність оператора маємо:

$$T^{-1}(V) = T^{-1}(V - Tx_0) + x_0,$$

тобто $T^{-1}(V)$ – це окіл точки x_0. $\square$

Лінійний оператор $T\colon X \to E$ називається обмеженим оператором, якщо образ під дією T довільної обмеженої підмножини простору X є обмеженою множиною в E.

Теорема 2. Кожен неперервний лінійний оператор $T : X \to E$ обмежений.

Доведення. Нехай A – обмежена множина в X. Доведемо обмеженість множини $T(A)$. Нехай V – довільний окіл нуля в E і U – такий окіл нуля в X, що $T(U) \subset V$. Скориставшись обмеженістю множини A, виберемо таке $N > 0$, що $A \subset tU$ для всіх $t > N$. Тоді $T(A) \subset tT(U) \subset tV$ при $t > N$. $\square$

Теорема 3. Нехай оператор $T\colon X \to E$ переводить деякий окіл нуля U простору X в обмежену множину. Тоді T неперервний.

Доведення. Нехай $T(U)$ – обмежена множина Для довільного V – околу нуля в E існує таке $t > 0$, що $T(U) \subset tV$. Тоді $\frac{1}{t}U \subset T^{-1}(V)$, тобто $T^{-1}(V)$ – окіл нуля в X. $\square$

Теорема 4. Для ненульового лінійного функціонала f, заданого на топологічному векторному просторі X, такі умови еквівалентні:

(i) функціонал f неперервний;

(ii) ядро функціонала f замкнене;

(iii) ядро функціонала f нещільне в X;

(iv) існує окіл нуля U, для якого $f(U)$ – обмежена множина.

Доведення. (i) $\Rightarrow$ (ii). Прообраз замкненої множини замкнений, зокрема, $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0)$ – замкнена множина.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Якщо ядро замкнене і щільне в X, то $\mathrm{Ker} f = X$, тобто $f \equiv 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Нехай ядро нещільне. Тоді існує точка $x \in X$ і такий збалансований окіл нуля U, що $(U + x) \cap \mathrm{Ker} f = \emptyset$. Це означає, що функціонал f не може в жодній точці $y \in U$ приймати значення $-f(x)$. Отже, $f(U)$ – збалансована множина комплексних чисел, яка не збігається з усією комплексною площиною ($-f(x) \notin f(U)$). Тому, $f(U)$ – круг із центром у нулі (в дійсному випадку це був би відрізок в $\mathbb{R}$, симетричний відносно нуля).

Імплікацію (iv) $\Rightarrow$ (i) вже доведено в теоремі 3. $\square$

Так само, як і у випадку нормованих просторів, для топологічного векторного простору X через X^* будемо позначати множину всіх неперервних лінійних функціоналів на X. На топологічні векторні простори переноситься теорема Гана-Банаха в геометричній формі.

Теорема 5. Нехай A і B – неперетинні непорожні опуклі підмножини дійсного топологічного векторного простору X і множина A відкрита. Тоді існує такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$.

Враховуючи зв'язок між лінійним функціоналом і його дійсною частиною, можна також отримати варіант теореми для комплексного простору, замінивши останні умови на $\mathrm{Re} f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $\mathrm{Re} f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$.

Теорема 6. Нехай X – гаусдорфів топологічний векторний простір, $\dim X = n$. Тоді:

(a) Довільний лінійний функціонал на X неперервний.

(b) Для довільного топологічного векторного простору E довільний лінійний оператор $T\colon X \to E$ неперервний.

(c) X ізоморфний n-вимірному гільбертовому простору ℓ_2^n.

(d) X повний.

Доведення. На початку відмітимо, що при фіксованому n мають місце імплікації (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d).

Справді, (a) $\Rightarrow$ (b), оскільки, вибираючи в X базис $\{x_k\}_{k=1}^n$ з координатними функціоналами $\{f_k\}_{k=1}^n$, оператор T можна зобразити у вигляді

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^n f_k(x)x_k\right) = \sum_{k=1}^n f_k(x)Tx_k.$$

Тобто обчислення $T(x)$ зводиться до обчислення скалярів $f_k(x)$ (ця дія є неперервною за припущенням (a)), множення їх на фіксовані вектори Tx_k і додавання отриманих добутків. Але, за аксіомами топологічного векторного простору, множення на скаляр і сума – неперервні операції.

(b) $\Rightarrow$ (c). Обидва простори X і ℓ_2^n мають вимірність n, отже, існує лінійна бієкція $T\colon X \to \ell_2^n$. Отже, і T, і T^{-1} неперервні за умовою (b).

На завершення, імплікацію (c) $\Rightarrow$ (d) отримуємо, використовуючи повноту простору ℓ_2^n.

Основне твердження (a) доведемо індукцією за n. При $n = 0$ простір X складається лише з нульового елемента, і твердження є тривіальним. Здійснимо перехід $n \to n+1$. Нехай $\dim X = n+1$ і f – ненульовий лінійний функціонал на X. Тоді $\mathrm{Ker} f$ – n-вимірний простір. За припущенням індукції з урахуванням доведених імплікацій (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d), $\mathrm{Ker} f$ – повний простір. Отже, $\mathrm{Ker} f$ замкнене в X, і, за теоремою 4, функціонал f неперервний. $\square$