Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 18

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Лінійний простір X (дійсний або комплексний) із заданою на ньому топологією τ називається топологічним векторним простором, якщо топологія τ так узгоджена з лінійною структурою, що відображення суми елементів і множення скаляра на елемент неперервні за сукупністю змінних.

Щоб не зупинятися кожного разу окремо на дійсному і комплексному випадках, будемо припускати всі простори комплексними, залишаючи простіший дійсний випадок читачеві для самостійного вивчення.

Розпишемо означення детальніше. Нехай X – топологічний векторний простір. Розглянемо функції $F\colon X\times X \to X$ і $G\colon \mathbb{C}\times X \to X$, які діють за правилом $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$; $G(\lambda, x) = \lambda x$. Узгодження топології з лінійною структурою означає, що функції F і G неперервні як функції від двох змінних.

Теорема 1. Нехай U – відкрита множина в X. Тоді

- для довільного $x \in X$ множина $U + x$ є відкритою;
- для довільного $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ є відкритою множина λU.

З теореми 1 випливає, що околи довільного елемента $x \in X$ – це множини вигляду $U + x$, де U – околи нуля. Відповідно, топологія τ однозначно визначається системою $\mathfrak{N}_0$ околів нуля. Тому решта властивостей топології τ будуть формулюватися мовою околів нуля. Нижче через $\mathbb{C}_r$ буде позначатися круг в $\mathbb{C}$ радіуса r з центром у нулі: $\mathbb{C}_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant r\}$.

Підмножина A лінійного простору X називається поглинаючою, якщо для довільного $x \in X$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $x \in tA$ для довільного $t > n$. Підмножина $A \subset X$ називається збалансованою, якщо для довільного скаляра $\lambda \in \mathbb{C}_1$ виконується включення $\lambda A \subset A$.

Теорема 2.Система $\mathfrak{N}_0$ околів нуля топологічного векторного простору X має такі властивості:

(i) Довільний окіл нуля – поглинаюча множина.

(ii) Кожен окіл нуля містить збалансований окіл нуля.

(iii) Для довільного околу $U \in \mathfrak{N}_0$ існує збалансований окіл $V \in \mathfrak{N}_0$ з $V + V \subset U$.

Доведення. (i) Зафіксуємо $x \in X$ і скористаємося неперервністю функції $f(\lambda) = \lambda x$. Оскільки $f(0) = 0$, неперервність в точці $\lambda = 0$ означає, що для довільного $U \in \mathfrak{N}_0$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $\lambda x \in U$ для довільного $\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon$. Ввівши позначення $t = \frac{1}{\lambda}$, отримаємо, що $x \in tU$ для довільного $t > \frac{1}{\varepsilon}$.
(ii) Нехай $U \in \mathfrak{N}_0$. Зважаючи на неперервність у точці $(0, 0)$ функції $G(\lambda, x) = \lambda x$ існує таке $\varepsilon > 0$ і такий окіл $W \in \mathfrak{N}_0$, що $\lambda x \in U$ для довільного $\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon$ і будь-якого $x \in W$. Покладемо $V = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon} \lambda W$. Покажемо, що ця множина $V \subset U$ і є необхідним збалансованим околом нуля. З одного боку, $V \supset \varepsilon W$, отже, $V \in \mathfrak{N}_0$. З іншого боку, для довільного $\lambda_0 \in \mathbb{C}_1$ маємо $\lambda_0 \mathbb{C}_\varepsilon \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, отже,

$$\lambda_0 V = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon} \lambda_0 \lambda W = \bigcup_{\mu \in \lambda_0 \mathbb{C}_\varepsilon} \mu W \subset \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}_\varepsilon} \mu W = V;$$

що доводить збалансованість околу V.

(iii) Зважаючи на неперервність у точці $(0,0)$ функції $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ для довільного околу $U \in \mathfrak{N}_0$ існують околи $V_1, V_2 \in \mathfrak{N}_0$ з $V_1 + V_2 \subset U$. Необхідну збалансованість околу нуля V виберемо на основі п. (ii) так, щоб V містилась в околі $V_1 \cap V_2$. $\square$

Теорема 3. Для відокремлюваності за Гаусдорфом топологічного векторного простору X необхідно і досить, щоб система $\mathfrak{N}_0$ околів нуля задовольняла таку умову: для довільного $x \neq 0$ існує окіл $U \in \mathfrak{N}_0$, який не містить точки x.

Доведення. Нехай $x \neq y$. Тоді $x - y \neq 0$ й існує окіл $U \in \mathfrak{N}_0$, який не містить $x - y$. Виберемо такий окіл $V \in \mathfrak{N}_0$, щоб $V - V \subset U$. Тоді околи $x + V$ і $y + V$ не перетинаються: якщо існує точка z, яка належить одночасно $x + V$ і $y + V$, то $z - x \in V$, $z - y \in V$ і

$$x - y = (z - y) - (z - x) \in V - V \subset U. \qquad \square$$

Перевірте, що нижченаведені простори є топологічними векторними просторами.

18.1. Простір $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ вимірних функцій на просторі зі скінченною мірою, наділений топологією збіжності за мірою. Базу околів функції f утворюють множини функцій

$$\{g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu) : \mu\{t : |g(t) - f(t)| > \delta\} < \varepsilon\}, \quad \delta, \varepsilon > 0.$$

У цьому просторі, зазвичай, функції, які дорівнюють одна одній майже скрізь, ототожнюються: без цієї домовленості простір не був би відокремлюваним.

18.2. Будь-який нормований простір в топології, що задається нормою.

18.3. Добуток Тихонова топологічних векторних просторів, з лінійними операціями, які задаються покоординатно:

$$a\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} + b\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{ax_\gamma + by_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}.$$

18.4. Внутрішність та замикання опуклої множини є опуклою.

18.5. Замикання лінійного підпростору є лінійним підпростором.

18.6. Кожен окіл нуля містить збалансований відкритий окіл нуля.

18.7. Кожен окіл нуля містить збалансований замкнений окіл нуля.

Щоб успішно працювати з топологічними векторними просторами, потрібно визначити аналоги основних понять, які використовуються при роботі з нормованими просторами. Оскільки топологічний векторний простір, взагалі кажучи, неметризовний, тому потрібно відмовитися від мови послідовностей і використовувати відповідну цій загальній ситуації мову околів і фільтрів.

Означення. Фільтр $\mathfrak{F}$ у топологічному векторному просторі X називається фільтром Коші, якщо для довільного околу нуля U існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $A - A \subset U$. Такий елемент A називається малим порядку U.

Теорема 4. Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ має границю, то $\mathfrak{F}$ – фільтр Коші.
Доведення. Нехай $\lim \mathfrak{F} = x$ і $U \in \mathfrak{N}_0$. Виберемо $V \in \mathfrak{N}_0$ з $V - V \subset U$. За означенням границі, існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $A \subset x + V$. Відповідно,

$$A - A \subset (x + V) - (x + V) \subset V - V \subset U. \qquad \square$$

Теорема 5. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр Коші на топологічному векторному просторі X і x – гранична точка фільтра $\mathfrak{F}$. Тоді $\lim \mathfrak{F} = x$.
Доведення. Нехай $x + U$ – довільний окіл точки x, $U \in \mathfrak{N}_0$. Виберемо окіл $V \in \mathfrak{N}_0$ з $V + V \subset U$ і множину $A \in \mathfrak{F}$, малого порядку V: $A - A \subset V$. За означенням граничної точки, множини A і $x + V$ перетинаються, тобто існує $y \in A \cap (x + V)$. Тоді

$$x + U \supset x + V + V \supset y + V \supset y + A - A \supset y + A - y = A.$$

Отже, окіл $x + U$ містить елемент фільтра $\mathfrak{F}$, тому $x + U \in \mathfrak{F}$.
□

Множина A в топологічному векторному просторі X називається повною, якщо будь-який фільтр Коші на X, що містить A як елемент, має границю, яка належить до A. Зокрема, топологічний векторний простір X називається повним, якщо будь-який фільтр Коші в X має границю.

Теорема 6. Нехай X – підпростір топологічного векторного простору E і $A \subset X$ – повна підмножина простору X. Тоді A є повною як підмножина простору E.

Доведення. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр Коші на E, який містить A як елемент. Тоді, зокрема $X \in \mathfrak{F}$, тобто слід $\mathfrak{F}_X$ на X фільтра $\mathfrak{F}$ є фільтром. $\mathfrak{F}_X$ – фільтр Коші на X, який містить A як елемент. Отже, зважаючи на повноту A в X, фільтр $\mathfrak{F}_X$ має в X границю $a \in A$. Ця ж точка a є границею фільтра $\mathfrak{F}$ в E. $\square$

Теорема 7. Повна підмножина A гаусдорфового топологічного векторного простору X замкнена. Зокрема, якщо підпростір гаусдорфового топологічного векторного простору повний в індукованій топології, то цей підпростір замкнений.

Доведення. Нехай точка $x \in X$ належить до замикання множини A. Потрібно довести, що $x \in A$. Розглянемо сім'ю $\mathfrak{D}$ всіх перетинів вигляду $(x+U)\cap A$, де $U \in \mathfrak{N}_0$. Всі такі перетини не порожні, і $\mathfrak{D}$ задовольняє всі аксіоми бази фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}$, породжений базою $\mathfrak{D}$, мажорує фільтр $\mathfrak{N}_x$ всіх околів точки x, отже, $\lim \mathfrak{F} = x$. Зокрема, $\mathfrak{F}$ – це фільтр Коші. За побудовою наша повна множина A є елементом фільтра $\mathfrak{F}$; отже, згідно з означенням, у фільтра $\mathfrak{F}$ повинна бути границя в A. Зважаючи на єдиність границі, $x \in A$, що й потрібно було довести. $\square$