Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 17

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Критерій компактності в термінах фільтрів. Для гаусдорфового топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(1) X – компакт;

(2) кожен фільтр на X має граничну точку;

(3) кожен ультрафільтр на X має границю.

Наслідок Нехай $\mathfrak{A}$ – ультрафільтр на E, X – топологічний простір і образ функції $f\colon E \to X$ лежить у деякому компакті $K \subset X$. Тоді існує $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f$.

Приклад скінченно-адитивної міри на $2^{\mathbb{N}}$, яка не є зліченно-адитивною.

Нехай на множині X задано сім'ю відображень F, де відображення $f \in F$ діють відповідно в (можливо різні) топологічні простори $f(X)$. Для довільної точки $x \in X$, довільної скінченної сім'ї відображень $\{f_k\}_{k=1}^n \subset F$ і відкритих околів V_k точок $f_k(x)$ у просторі $f_k(X)$ визначимо множини

$$U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(V_k).$$

Нагадаємо, що якщо для кожної точки $x \in X$ задана непорожня сім'я підмножин U_x, яка має такі властивості:

- якщо $U \in U_x$, то $x \in U$;
- якщо $U_1, U_2 \in U_x$, то існує таке $U_3 \in U_x$, що $U_3 \subset U_1 \cap U_2$;
- якщо $U \in U_x$ і $y \in U$, то існує таке $V \in U_y$, що $V \subset U$,

то існує топологія τ на X, для якої сім'ї U_x є базами околів відповідних точок.

Тому на X існує топологія (можливо, невідокремлювана), для якої множини $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ утворюють базу околів точки x для всіх $x \in X$. Позначимо цю топологію символом $\sigma(X,F)$. Зокрема, околами точки $x \in X$ в топології $\sigma(X,F)$ будуть всі множини вигляду $f^{-1}(V)$, де $f \in F$, а V – окіл точки $f(x)$ у топологічному просторі $f(X)$. Отже, всі відображення сім'ї F неперервні в $\sigma(X,F)$.

Теорема 1. $\sigma(X,F)$ – це найслабша з топологій на X, в яких неперервні всі відображення сім'ї F.

Доведення. Нехай τ – деяка топологія, в якій всі відображення сім'ї F неперервні. Доведемо, що довільна множина вигляду $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ буде околом точки x в топології τ. Цим буде доведено, що $\tau \succ \sigma(X,F)$. За умовою, всі відображення $f_k\colon X \to f_k(X)$ неперервні в топології τ. Отже, $f_k^{-1}(V_k)$ – це відкриті околи в τ точки x; відкритим околом є і скінченний перетин $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ таких множин. $\square$

Топологія $\sigma(X, F)$ називається топологією, породженою сім'єю відображень F. Інша назва (виникла з доведення теореми) – найслабша топологія, в якій неперервні всі відображення сім'ї F.

Сім'я відображень F відокремлює точки множини X, якщо для довільних $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ існує відображення $f \in F$ з $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 2. Нехай всі простори $f(X)$, $f \in F$ гаусдорфові. Для того, щоб топологія $\sigma(X, F)$ була відокремлюваною за Гаусдорфом, необхідно і досить, щоб сім'я відображень F відокремлювала точки множини X.

Достатність. Припустимо, що F відокремлює точки множини X. Тоді для довільних $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ існує $f \in F$ з $f(x_1) \neq f(x_2)$. Оскільки $f(X)$ – гаусдорфів простір, існують неперетинні околи V_1, V_2 точок $f(x_1)$ і $f(x_2)$ відповідно. Множини $f^{-1}(V_1)$ і $f^{-1}(V_2)$ є шуканими $\sigma(X, F)$-околами, що відокремлюють точки x_1 і x_2.

Необхідність. Нехай F не відокремлює точки множини X. Тоді існують такі $x_1, x_2 \in X$, $\quad x_1 \neq x_2$, що $f(x_1) = f(x_2)$ для довільного $f \in F$. Візьмемо довільний $\sigma(X, F)$-окіл $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$ точки x_1. Оскільки $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$, тому і x_2 також лежатиме в $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$. $\square$

Теорема 3. Для того, щоб фільтр $\mathfrak{F}$ на X збігався в топології $\sigma(X, F)$ до елемента x, необхідно і досить, щоб умова

$$\lim_{\mathfrak{F}} f = f(x)$$

виконувалась для всіх $f \in F$.

Доведення. З огляду на неперервність всіх $f \in F$ в $\sigma(X, F)$ необхідність випливає з теореми, що була на попередній лекції. Доведемо достатність. Нехай $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ для всіх $f \in F$. Нам потрібно довести, що довільний окіл вигляду $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ буде елементом фільтра $\mathfrak{F}$. За умовою, $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f_k = f_k(x)$, отже, $f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки фільтр стійкий відносно скінчених перетинів елементів, то

$$U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}. \qquad \square$$

Нехай Γ – індексна множина (тобто множина, елементи якої надалі називатимуться індексами). Далі, нехай кожному індексу $\gamma \in \Gamma$ поставлено у відповідність деяку множину X_γ.
Декартовим добутком множин X_γ по $\gamma \in \Gamma$ називається множина $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, яка складається з всіх функцій $x\colon \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, що задовольняють для довільного $\gamma \in \Gamma$ умову $x(\gamma) \in X_\gamma$. В окремому випадку, коли всі X_γ дорівнюють одній і тій самій множині X, добуток складається з усіх функцій $x\colon \Gamma \to X$. В цьому випадку декартів добуток називається декартовим степенем і позначається X^Γ.
Значення функції $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ часто позначають не $x(\gamma)$, а x_γ і сам елемент $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ записують у вигляді $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ проіндексованої множини значень.
Для довільного $\alpha \in \Gamma$ відображення $P_\alpha\colon \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to X_\alpha$, яке діє за правилом $P_\alpha(x) = x_\alpha$, називають координатним проектором.

Нехай всі X_γ, $\gamma \in \Gamma$ – топологічні простори. Топологією Тихонова на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ називається найслабша з топологій, в яких неперервні всі координатні проектори P_α, $\alpha \in \Gamma$. Декартів добуток $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, наділений топологією Тихонова, називається добутком Тихонова.

Зазначимо, що координатні проектори очевидним чином відокремлюють точки добутку, отже, за теоремою 2, добуток Тихонова гаусдорфових просторів відокремлюваний за Гаусдорфом. Далі, за теоремою 3, правильне таке твердження.

Критерій збіжності в добутку Тихонова. Фільтр $\mathfrak{F}$ на $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ збігається в топології Тихонова до елемента $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ тоді і тільки тоді, коли $x_\gamma = \lim\limits_{\mathfrak{F}} P_\gamma$ для всіх $\gamma \in \Gamma$.