Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 16

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Ультрафільтром на X називається максимальний за включенням фільтр на X. Детальніше: фільтр $\mathfrak{A}$ на X називається ультрафільтром, якщо довільний фільтр $\mathfrak{F}$ на X, що мажорує $\mathfrak{A}$, збігається з $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. Для довільного фільтра $\mathfrak{F}$ на X існує ультрафільтр, що його мажорує.

Лема 1. Нехай $\mathfrak{A}$ – ультрафільтр, $A \subset X$ і всі елементи ультрафільтра перетинаються з A. Тоді $A \in \mathfrak{A}$.
Доведення. Легко бачити, що, додавши до сім'ї множин $\mathfrak{A}$ як елемент ще множину A, ми отримаємо центровану сім'ю множин. Тому існує фільтр $\mathfrak{F}$, що містить всі елементи цієї центрованої сім'ї. Маємо: $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ – ультрафільтр, тобто $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$. З іншого боку, за побудовою, $A \in \mathfrak{F}$. Тому, $A \in \mathfrak{A}$. $\square$

Критерій ультрафільтра. Щоб фільтр $\mathfrak{A}$ на X був ультрафільтром, необхідно і досить, щоб для довільної множини $A \subset X$ або A, або $X \backslash A$ належало до фільтра $\mathfrak{A}$.

Доведення.

Необхідність. Нехай $\mathfrak{A}$ – ультрафільтр і $X \backslash A \notin \mathfrak{A}$. Тоді жодна множина $B \in \mathfrak{A}$ не міститься повністю в $X \backslash A$, тобто довільна $B \in \mathfrak{A}$ перетинається з A. Тому, за лемою 1, $A \in \mathfrak{A}$.

Достатність. Припустимо, що $\mathfrak{A}$ – не ультрафільтр. Тоді існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ і множина $A \in \mathfrak{F} \backslash \mathfrak{A}$. За побудовою, $A \notin \mathfrak{A}$. З іншого боку, $X \backslash A$ не перетинається з A, $A \in \mathfrak{F}$, тому, $X \backslash A$ не може належати до фільтра $\mathfrak{F}$, а тим більше до меншого, ніж $\mathfrak{F}$ фільтра $\mathfrak{A}$. $\square$

Наслідок 1. Образ ультрафільтра – ультрафільтр.

Доведення. Нехай $f\colon X \to Y, \mathfrak{A}$ – ультрафільтр на X. Розглянемо довільну $A \subset Y$. Тоді або $f^{-1}(A)$, або $f^{-1}(Y \backslash A) = X \backslash f^{-1}(A)$ належить до $\mathfrak{A}$. Відповідно або A, або $Y \backslash A$ належить до $f[\mathfrak{A}]$. □

Лема 2. Нехай $\mathfrak{A}$ – ультрафільтр на гаусдорфовому топологічному просторі X і $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{A})$. Тоді $x = \lim \mathfrak{A}$. Зокрема, в ультрафільтра може бути не більше однієї граничної точки.

Доведення. Нехай U – довільний окіл точки x. Тоді, за означенням граничної точки, U перетинається зі всіма елементами ультрафільтра $\mathfrak{A}$. За лемою, $U \in \mathfrak{A}$. □

Теорема 1. Гаусдорфів топологічний простір K є компактом тоді і тільки тоді, коли довільна центрована сім'я замкнених підмножин простору K має спільну точку.

Доведення. Нехай K – компакт, $\mathfrak{W}$ – центрована сім'я замкнених підмножин K. Припустимо, що в елементів цієї сім'ї немає спільної точки, тобто $\bigcap_{W\in\mathfrak{W}} W$ порожній.

Переходячи до доповнень, одержуємо, що $\bigcup_{W\in\mathfrak{W}} (K\setminus W) = K$. Отже, відкриті множини вигляду $K\setminus W$ утворюють покриття компакту K. Виберемо скінченне підпокриття:

$$K\setminus W_1,\ \dots,\ K\setminus W_n,\ W_i \in \mathfrak{W},\ \bigcup_{i=1}^{n} (K\setminus W_i) = K.$$

Але остання умова означає, що $\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ порожній. Протиріччя із центрованістю сім'ї $\mathfrak{W}$.

Навпаки, припустимо, що будь-яка центрована сім'я замкнених підмножин простору K має спільну точку, і доведемо, що K – компакт. Нехай сім'я $\mathfrak{U}$ відкритих множин утворює покриття простору K. Тоді доповнення до елементів сім'ї $\mathfrak{U}$ – це система $\mathfrak{W}$ замкнених множин із порожнім перетином. За умовою $\mathfrak{W}$ не може бути центрованою сім'єю множин, отже, існує скінченний набір $W_1, \ldots, W_n \in \mathfrak{W}$, який має порожній перетин. Тоді

$$\bigcup_{i=1}^{n} (K \setminus W_i) = K,\ K \setminus W_i \in \mathfrak{U},$$

тобто з покриття $\mathfrak{U}$ можна вибрати скінченне підпокриття. Теорему доведено. $\square$

Критерій компактності в термінах фільтрів. Для гаусдорфового топологічного простору X такі умови еквівалентні:

(1) X – компакт;

(2) кожен фільтр на X має граничну точку;

(3) кожен ультрафільтр на X має границю.

Доведення.
(1) $\Rightarrow$ (2). Фільтр $\mathfrak{F}$ – центрована сім'я множин. Тим паче, центрованою буде сім'я замикань елементів фільтра. Тому, перетин $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ цих замикань не порожній.
(2) $\Rightarrow$ (1). Нехай $\mathfrak{C}$ – довільна центрована сім'я замкнених підмножин простору X. Тоді існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$. Маємо

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{C}} \overline{A} \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). За умовою (2) кожен ультрафільтр має граничну точку, а за лемою 2 ця точка буде границею ультрафільтра.

(3) $\Rightarrow$ (2). Розглянемо довільний фільтр $\mathfrak{F}$ на X і виберемо (теорема 1) ультрафільтр $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}$. За умовою (3), ультрафільтр $\mathfrak{A}$ має границю $x \in X$. Цей x буде граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$.

Наслідок 2. Нехай $\mathfrak{A}$ – ультрафільтр на E, X – топологічний простір і образ функції $f\colon E \to X$ лежить у деякому компакті $K \subset X$. Тоді існує $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f$.

Доведення. Розглянемо f як функцію, що діє з E в K. Оскільки (наслідок 1) $f[\mathfrak{A}]$ – ультрафільтр на компакті K, то існує $\lim f[\mathfrak{A}]$. А, за означенням, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f = \lim f[\mathfrak{A}]$. □

Приклад. Нехай E – множина, $e \in E$ – фіксована точка. Перевірте, що сім'я $\mathfrak{A}_e \subset 2^E$ всіх множин, яка містить e як елемент, утворює ультрафільтр на E. Ультрафільтр такого вигляду називається тривіальним ультрафільтром.

Існування нетривіальних ультрафільтрів на $\mathbb{N}$.