Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 15

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Границі, граничні точки і порівняння фільтрів

Ультрафільтри.

Означення. Нехай X – топологічний простір, $\mathfrak{F}$ – фільтр на X. Точка $x \in X$ називається границею фільтра $\mathfrak{F}$ (позначення – $x = \lim \mathfrak{F}$), якщо $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр околів точки x. Іншими словами, $x = \lim \mathfrak{F}$, якщо кожен окіл точки x належить до фільтра $\mathfrak{F}$.

Точка $x \in X$ називається граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$, якщо кожен окіл точки x перетинається зі всіма елементами фільтра $\mathfrak{F}$. Множина всіх граничних точок фільтра $\mathfrak{F}$ позначається $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$.

Теорема 1. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на топологічному просторі X, $\mathfrak{D}$ – деяка база фільтра $\mathfrak{F}$. Тоді

(a) $x = \lim \mathfrak{F}$ тоді і тільки тоді, коли для довільного околу U точки x існує такий елемент $A \in \mathfrak{D}$, що $A \subset U$.

(b) Якщо $x = \lim \mathfrak{F}$, то x – гранична точка фільтра $\mathfrak{F}$. Якщо, крім того, X – гаусдорфів простір, то фільтр $\mathfrak{F}$ не має інших граничних точок. Зокрема, якщо фільтр у гаусдорфовому просторі має границю, то ця границя єдина.

(c) Множина $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ збігається з перетином замикань всіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

Доведення

(a) За означенням, $x = \lim \mathfrak{F}$, якщо кожен окіл U точки x належить до фільтра $\mathfrak{F}$. У свою чергу, $U \in \mathfrak{F}$ тоді і тільки тоді, коли U містить деяку підмножину $A \in \mathfrak{D}$.

(b) Нехай $x = \lim \mathfrak{F}$, U – окіл точки x. Тоді $U \in \mathfrak{F}$ і, як наслідок, довільна множина $A \in \mathfrak{F}$ перетинається з U. Тобто $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$.

Далі, нехай $x = \lim \mathfrak{F}$, $y \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$, U і V – довільні околи точок x і y відповідно. Тоді $U \in \mathfrak{F}$ і, оскільки довільний окіл граничної точки перетинається зі всіма елементами фільтра $\mathfrak{F}$, то $U \cap V \neq \emptyset$. З огляду на відокремлюваність за Гаусдорфом остання умова може виконуватися, лише якщо $x = y$.

(c) За означенням, $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ тоді і тільки тоді, коли довільний елемент $A \in \mathfrak{F}$ перетинається зі всіма околами точки x. Це еквівалентне тому, що x належить до замикання кожного елемента $A \in \mathfrak{F}$. $\square$

Теорема 2. Нехай $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ – фільтри на топологічному просторі X і $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді:

(i) якщо $x = \lim \mathfrak{F}_1$, то $x = \lim \mathfrak{F}_2$;

(ii) якщо $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_2)$, то $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1)$. Зокрема,

(iii) якщо $x = \lim \mathfrak{F}_2$, то $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1)$.

Доведення. (i) $\mathfrak{F}_1$ мажорує фільтр $\mathfrak{N}_x$ околів точки x, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, отже, $\mathfrak{N}_x \subset \mathfrak{F}_2$.
(ii) Оскільки при збільшені кількості множин їх перетин зменшується, маємо

$$\mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_2) = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_2} \overline{A} \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_1} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1). \qquad \square$$

Означення. Нехай X – множина, Y – топологічний простір, $\mathfrak{F}$ – фільтр на X. Точка $y \in Y$ називається границею функції $f\colon X \to Y$ за фільтром $\mathfrak{F}$ (позначення – $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$), якщо $y = \lim f[\mathfrak{F}]$.
Іншими словами, $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$, якщо для довільного околу U точки y існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $f(A) \subset U$.
Точка $y \in Y$ називається граничною точкою функції $f\colon X \to Y$ за фільтром $\mathfrak{F}$, якщо $y \in \mathrm{LIM}(f[\mathfrak{F}])$, тобто якщо кожен окіл точки y перетинається з образами всіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

Приклад. Нехай X – топологічний простір, $f : \mathbb{N} \to X$ і $\mathfrak{F}$ – фільтр Фреше на $\mathbb{N}$. Тоді $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

Теорема 3. Нехай X, Y – топологічні простори, $\mathfrak{F}$ – фільтр на X, $x = \lim \mathfrak{F}$ і функція $f : X \to Y$ неперервна. Тоді $f(x) = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$.

Доведення. Нехай U – довільний окіл точки $f(x)$. Тоді існує окіл V точки x, для якого $f(V) \subset U$. Умова $x = \lim \mathfrak{F}$ означає, що $V \in \mathfrak{F}$. Тобто для довільного околу U точки $f(x)$ ми знайшли потрібний елемент $V \in \mathfrak{F}$ з $f(V) \subset U$. $\square$

Вправа. Запишіть для функцій дійсної змінної вирази $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ як границі функцій зі спеціально підібраним фільтром.

Наступна лема є основою застосування леми Цорна до сімей фільтрів.

Лема. Нехай $\mathfrak{M}$ – лінійно впорядкована непорожня сім'я фільтрів, заданих на множині X, тобто для довільних $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$ або $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$, або $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$. Тоді об'єднання $\mathfrak{F}$ всіх фільтрів сім'ї $\mathfrak{M}$ знову буде фільтром на X.

Доведення. Потрібно перевірити для сім'ї множин $\mathfrak{F}$ виконання аксіом фільтра. Аксіоми (i) і (ii) тут очевидні, перевіримо виконання тих двох, що залишились.

(iii) Нехай $A, B \in \mathfrak{F}$. Тоді існують такі $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1, B \in \mathfrak{F}_2$. За умовою, один із фільтрів $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ мажорує інший. Вважатимемо, що $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$. Тоді обидві множини A, B належать до $\mathfrak{F}_2$ і, оскільки $\mathfrak{F}_2$ – фільтр, то $A \cap B \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$.

(iv) Нехай $A \in \mathfrak{F}, A \subset B \subset X$. Тоді існує такий $\mathfrak{F}_1 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$. Оскільки $\mathfrak{F}_1$ – фільтр, то $B \in \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. $\square$

Ультрафільтром на X називається максимальний за включенням фільтр на X. Детальніше: фільтр $\mathfrak{A}$ на X називається ультрафільтром, якщо довільний фільтр $\mathfrak{F}$ на X, що мажорує $\mathfrak{A}$, збігається з $\mathfrak{A}$.

З леми Цорна відразу випливає така теорема існування.

Теорема 4. Для довільного фільтра $\mathfrak{F}$ на X існує ультрафільтр, що його мажорує.