Теорія міри і інтеграла
Тема 11 “Теорема Гана–Банаха”
Лекція 31

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Теорема Гана-Банаха (повторення)

Інваріантне середнє на комутативній півгрупі.

Груба задача теорії міри.

Узагальнена банахова границя.

Дійснозначна функція p, задана на лінійному просторі X, називається опуклим функціоналом, якщо вона задовольняє такі умови:

- $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для будь-якого вектора $x \in X$ і будь-якого невід'ємного числа λ (додатна однорідність) і
- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для будь-яких $x, y \in X$ (нерівність трикутника).

Теорема Гана-Банаха в аналітичній формі (S. Banach, H. Hahn). Нехай на дійсному лінійному просторі X задано опуклий функціонал p; Y – підпростір в X, f – лінійний функціонал на Y і $f(y) \leqslant p(y)$ для будь-якого $y \in Y$. Тоді f можна продовжити до лінійного функціонала g, заданого на всьому X, із збереженням умови мажорування: $g(x) \leqslant p(x)$ для будь-якого $x \in X$.

Нехай G – комутативна півгрупа; півгрупову операцію на G позначатимемо знаком '+'. Розглянемо лінійний простір $\ell_\infty(G)$ всіх обмежених дійснозначних функцій на G. Кожен елемент $g \in G$ породжує оператор зсуву $S_g \colon \ell_\infty(G) \to \ell_\infty(G)$, який діє за правилом $\left(S_g F\right)(h) = F(g+h)$. Лінійний функціонал $\mathcal{I}$ на $\ell_\infty(G)$ називається інваріантним середнім на G, якщо він задовольняє такі умови:

- $\inf\limits_{g\in G} F(g) \leqslant \mathcal{I}(F) \leqslant \sup\limits_{g\in G} F(g)$ для будь-якої функції $F \in \ell_\infty(G)$ (тобто $\mathcal{I}(F)$ – середнє значення для F);
- $\mathcal{I}\left(S_g F\right) = \mathcal{I}(F)$ для будь-якої функції $F \in \ell_\infty(G)$ і будь-якого $g \in G$ (інваріантність відносно зсувів).

Ми покажемо, що інваріантне середнє існує на будь-якій комутативній півгрупі G.

Для функції $F \in \ell_\infty(G)$ означимо величину

$$p(F) = \inf\left\{\sup_{h\in G} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\left(g_k + h\right) : n \in \mathbb{N},\ (g_k)_{k=1}^{n} \in G^n\right\},$$

де інфімум береться за всіма скінченними наборами $g_k \in G$, можливо, з повтореннями.

Твердження. p – опуклий функціонал на $\ell_\infty(G)$, який задовольняє для будь-якої функції $F \in \ell_\infty(G)$ і будь-якого $g \in G$ умови:

(1) $p\left(S_g F - F\right) \leqslant 0$;

(2) $p\left(F - S_g F\right) \leqslant 0$

(умови (1) і (2) разом означають рівність нулю виразів, які оцінюються).

Доведення. Додатна однорідность тут очевидна, перевіримо нерівність трикутника. Нехай $F_1, F_2 \in \ell_\infty(G)$, $\varepsilon > 0$. Виберемо такі елементи g_k^1, $k = 1, 2, \dots, n_1$ і g_k^2, $k = 1, 2, \dots, n_2$ півгрупи G, що

$$\sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} F_i\left(g_k^i + h\right) \right\} < p(F_i) + \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Тоді

$$p(F_1 + F_2) \leqslant \sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_1} (F_1 + F_2)\left(g_k^1 + g_j^2 + h\right) \right\}.$$

Скористаємось тим, що супремум суми не перевищує суми супремумів, і продовжимо оцінку:

$$\leqslant \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}F_1\left(g_k^1+g_j^2+h\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}F_2\left(g_k^1+g_j^2+h\right)\right\}\leqslant p(F_1)+p(F_2)+2\varepsilon,$$

що, на підставі довільності ε, доводить потрібну нерівність трикутника.

Перевіримо тепер умову (1).

$$p\left(S_gF-F\right)\leqslant\sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(S_gF-F\right)(h+kg)\right\}=$$

$$=\sup_{h\in G}\frac{1}{n}\left(F\left(h+(n+1)\,g\right)-F\left(h+g\right)\right)\leqslant\frac{2}{n}\sup_{h\in G}\left|F\left(h\right)\right|.$$

Спрямувавши в останній нерівності n до нескінченності, отримаємо потрібну оцінку. Нерівність (2) доводиться аналогічно.
□

Позначимо функцію, яка дорівнює на G тотожній одиниці, через $\mathbb{1}$. Зазначимо ще дві очевидні властивості функціонала p:

- $p(\mathbb{1}) = 1$;
- якщо функція F скрізь менша або дорівнює нулю, то $p(F) \leqslant 0$.

Теорема. На будь-якій комутативній півгрупі існує інваріантне середнє.

Доведення. Розглянемо в $\ell_\infty(G)$ підпростір $Y = \mathrm{Lin}\{\mathbb{1}\}$. Означимо функціонал на Y рівністю $f(c \cdot \mathbb{1}) = c$. Очевидно, що функціонал f лінійний і $f \leqslant p$. Скористаємось теоремою Гана-Банаха і продовжимо f на весь $\ell_\infty(G)$ до лінійного функціонала $\mathcal{I}$ зі збереженням умови мажорування. Доведемо, що $\mathcal{I}$ є інваріантним середнім.

Спочатку зазначимо властивість монотонності функціонала $\mathcal{I}$: якщо $F_1, F_2 \in \ell_\infty(G)$, $F_1 \leqslant F_2$ в усіх точках, то $\mathcal{I}(F_1) \leqslant \mathcal{I}(F_2)$. Справді, за такої умови $F_1 - F_2 \leqslant 0$, отже,

$$\mathcal{I}(F_1) - \mathcal{I}(F_2) = \mathcal{I}(F_1 - F_2) \leqslant p(F_1 - F_2) \leqslant 0.$$

З монотонності функціонала $\mathcal{I}$ одержуємо, що якщо функція F оцінюється зверху і знизу сталими: $c_1\mathbb{1} \leqslant F \leqslant c_2\mathbb{1}$, то $\mathcal{I}(F)$ оцінюється тими самими константами: $c_1 \leqslant \mathcal{I}(F) \leqslant c_2$. Отже, ми перевірили першу умову означення інваріантного середнього. Друга умова – інваріантність щодо зсувів – відразу випливає з умови мажорування і властивостей (1), (2) функціонала p:

$$\mathcal{I}(S_gF) - \mathcal{I}(F) = \mathcal{I}(S_gF - F) \leqslant p(S_gF - F) \leqslant 0;$$

$$\mathcal{I}(F) - \mathcal{I}(S_gF) = \mathcal{I}(F - S_gF) \leqslant p(F - S_gF) \leqslant 0. \qquad \square$$

Нагадаємо, що раніше ми довели нерозв'язність так званої тонкої задачі теорії міри: побудови інваріантної щодо зсуву зліченно-адитивної ймовірнісної міри μ, означеній на всіх підмножинах відрізка $[0, 1)$. Звідси ми виводили існування невимірних за Лебегом множин: якщо б кожна підмножина відрізка була вимірною за Лебегом, то міра Лебега була б розв'язком тонкої задачі теорії міри. Водночас аналогічна задача із заміною зліченної адитивності на скінченну адитивність (груба задача теорії міри) вже розв'язна.

Теорема (Банах). Існує скінченно-адитивна міра μ, означена на всіх підмножинах відрізка $[0,1)$, з $\mu([0,1]) = 1$ й інваріантна щодо зсувів (тобто $\mu(A+t) = \mu(A)$ для будь-якої підмножини $A \subset [0,1)$ і будь-якого $t \in \mathbb{R}$, таких, що $A + t \subset [0,1)$).

Доведення. Наділимо відрізок $[0,1)$ операцією додавання за модулем 1: сума чисел a і b за модулем 1 – це дробова частина числа g. Зафіксуємо $\mathcal{I}$ – інваріантне середнє на цій групі. Міра μ, визначена рівністю $\mu(A) = \mathcal{I}(\mathbb{1}_A)$, де $\mathbb{1}_A$ – характеристична функція множини A, і буде потрібною мірою. $\square$

Цікаво, що побудувати аналогічну міру на сфері тривимірного евклідового простору (тобто скінченно-адитивну ймовірнісну міру, визначену на всіх підмножинах сфери й інваріантну щодо ізометрій сфери) вже неможливо (F. Hausdorff, 1914). Причиною цього є складна структура групи ізометрій сфери. Читачеві, який зацікавився питаннями існування інваріантних мір, пропонуємо подивитись монографію
Wagon S. The Banach-Tarski paradox. – Cambrige Univ. Press, 1985.,
де розповідається про ефекти в дусі відомого парадоксу Банаха-Тарського, коли сфера розрізається на скінченне число «шматків», з яких вдається скласти дві нові сфери того ж розміру. Можливість такого розрізання, зрозуміло, приводила б до суперечності, якщо б «шматки» можна було «виміряти» за допомогою скінченно-адитивної інваріантної міри.

Розглянемо півгрупу $\mathbb{N}$ натуральних чисел за додаванням. Функції на $\mathbb{N}$ – це послідовності; інваріантне середнє на $\mathbb{N}$ називається узагальненою банаховою границею і позначається значком Lim.

Вправи.

31.1. Узагальнена банахова границя будь-якої обмеженої послідовності лежить між її верхньою і нижньою границями.

31.2. Якщо послідовність $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ має границю, то $\mathrm{Lim}\, x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

31.3. Якщо послідовність $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ рівномірно збігається за Чезаро до s, тобто послідовність

$$\frac{x_{k+1} + x_{k+2} + ... + x_{k+n}}{n}$$

рівномірно за k прямує до s при $n \to \infty$, то $\mathrm{Lim}\, x = s$.

31.4. На прикладі послідовності $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ переконайтесь, що узагальнена банахова границя послідовності може не бути граничною точкою цієї послідовності.
31.5. На прикладі послідовностей $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ і $y = (0, 1, 0, 1, ...)$ переконайтесь, що узагальнена банахова границя не є мультиплікативним функціоналом: $\mathrm{Lim}\,(xy)$ може не дорівнювати добутку $\mathrm{Lim}\,x$ на $\mathrm{Lim}\,y$.