Теорія міри і інтеграла
Тема 11 “Теорема Гана–Банаха”
Лекція 30

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай $(\Gamma, \prec)$ – впорядкована множина, тобто множина на якій задане відношення порядку $\prec$. Якщо для елементів $a, b \in \Gamma$ виконується співвідношення $b \prec a$, – говоритимемо, що елемент a мажорує елемент b. Якщо при цьому $a \neq b$, то говоримо, що a строго мажорує b.

Підмножина $A \subset \Gamma$ називається обмеженою, якщо в Γ існує елемент, який мажорує всі елементи множини A. Такий елемент називається верхньою межею підмножини A.

Підмножина $A \subset \Gamma$ називається ланцюгом або лінійно впорядкованою підмножиною, якщо будь-які два елементи $a, b \in A$ порівняльні, тобто або $a \prec b$, або $b \prec a$.

Елемент $a \in \Gamma$ називається максимальним елементом множини Γ, якщо в Γ не існує елемента, який строго мажорує a.

Впорядкована множина $\Gamma \neq \emptyset$ називається індуктивно впорядкованою, якщо кожен ланцюг в Γ обмежений.

Лема Цорна. Кожна індуктивно впорядкована множина має максимальний елемент.

У цьому розділі розглядатимуться лінійні простори над довільним полем $\mathbb{K}$.

Нехай A – підмножина лінійного простору X. Елемент $x \in X$ називається лінійною комбінацією елементів множини A, якщо він зображується у вигляді $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, де $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $x_k \in A$. Множина всіх лінійних комбінацій елементів множини A називається лінійною оболонкою множини A і позначається $\operatorname{Lin} A$. Зазначимо, що, навіть якщо множина A нескінченна, то при складані лінійних комбінацій використовуються лише скінченні (хоча й як завгодно великі) набори елементів з A.

Підмножина Y лінійного простору X називається лінійним підпростором, якщо для будь-яких λ, μ з $\mathbb{K}$ і будь-яких x, y з Y лінійна комбінація $\lambda x + \mu y$ також лежить в Y. Лінійна оболонка множини A – це найменший лінійний підпростір, який містить A.

Підмножина A лінійного простору X називається повною, якщо $\mathrm{Lin}\, A = X$; A називається лінійно незалежною, якщо для будь-якого скінченного набору елементів $x_k \in A$, $k = 1, 2, \ldots, n$, рівність $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ виконується, тільки якщо всі коефіцієнти λ_k дорівнюють 0. Повна лінійно незалежна підмножина називається базисом Гамеля. Якщо в просторі X існує скінченний базис Гамеля, простір називається скінченновимірним, у протилежному випадку простір називається нескінченновимірним. На відміну від лінійної алгебри, функціональний аналіз вивчає переважно нескінченновимірні простори.

Теорема. У будь-якому ненульовому лінійному просторі існує базис Гамеля. Більше того, будь-яку лінійно незалежну множину можна доповнити до базису Гамеля.

Доведення. Нехай X – лінійний простір, $A_0 \subset X$ – лінійно незалежна підможина. Розглянемо Γ – сім'ю всіх лінійно незалежних підмножин простору X, таких що містять в собі A_0, і задамо на Γ природне відношення порядку: підмножина A мажорує підмножину B, якщо $A \supset B$. Доведемо, що впорядкована множина Γ індуктивна. Для цього виділимо довільний ланцюг $\Gamma_1 \subset \Gamma$ і покажемо, що множина $M = \bigcup_{A \in \Gamma_1} A$ – об'єднання всіх множин, які є елементами ланцюга Γ_1, є верхньою межею в Γ ланцюга Γ_1. На підставі того, що M мажорує всі елементи ланцюга Γ_1, нам тільки треба довести, що $M \in \Gamma$. Іншими словами, нам потрібно показати, що M – лінійно незалежна множина.

Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – довільна скінченна підмножина в M; B_k, $k = 1, 2, \dots, n$ – відповідні елементи ланцюга Γ_1, які містять a_k: $a_k \in B_k$. Оскільки множини B_k попарно порівняльні, одна з них (скажімо, B_j) містить решту. Тобто $A \subset B_j$, B_j лінійно незалежна, отже, і A лінійно незалежна. Ми довели, що будь-яка скінченна підмножина множини M лінійно незалежна, отож і M – лінійно незалежна множина.

Згідно з лемою Цорна, в Γ існує максимальний елемент A. Покажемо, що A і є потрібний базис Гамеля. Властивість лінійної незалежності має будь-який елемент сім'ї Γ, зокрема, і множина A. Доведемо повноту множини A. Нехай $\mathrm{Lin}\, A \neq X$. Виберемо довільний елемент $x \in X \setminus \mathrm{Lin}\, A$. Тоді $A \cup \{x\}$ – лінійно незалежна множина, яка строго мажорує A, що суперечить максимальності A. □

Теорема Гамеля про існування розривних розв'язків функціонального рівняння Коші $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (на дошці).

У подальшому ми розглядатимемо лише дійсні або комплексні лінійні простори, тобто поле скалярів $\mathbb{K}$ – це завжди буде або $\mathbb{R}$, або ж $\mathbb{C}$.

Дійснозначна функція p, задана на лінійному просторі X, називається опуклим функціоналом, якщо вона задовольняє такі умови:

- $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для будь-якого вектора $x \in X$ і будь-якого невід'ємного числа λ (додатна однорідність) і
- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для будь-яких $x, y \in X$ (нерівність трикутника).

Обговорення і приклади на дошці.

Теорема. Нехай на дійсному лінійному просторі X задано опуклий функціонал p; Y – підпростір в X, f – лінійний функціонал на Y і $f(y) \leqslant p(y)$ для будь-якого $y \in Y$. Тоді f можна продовжити до лінійного функціонала g, заданого на всьому X, із збереженням умови мажорування: $g(x) \leqslant p(x)$ для будь-якого $x \in X$.

Доведення. Спочатку розберемо частковий випадок, коли Y має ковимірність 1 в X, тобто існує такий вектор $e \in X \setminus Y$, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$. Будь-який елемент простору X однозначно зображується у вигляді $x = \lambda e + y$, де $y \in Y$, а λ – дійсний скаляр. Тому потрібний функціонал g – продовження з Y функціонала f – однозначно визначається своїм значенням в точці e: $g(\lambda e + y) = \lambda g(e) + f(y)$. Для виконання умови мажорування число $g(e)$ повинно задовольняти умову

$$\lambda g(e) + f(y) \leqslant p(\lambda e + y) \text{ для будь-яких } \lambda \in \mathbb{R} \text{ і } y \in Y. \quad (*)$$

При $\lambda = 0$ ця умова виконана за припущеннями теореми. При додатному λ умова $(*)$ переписується у вигляді

$g(e) \leqslant \frac{1}{\lambda}(p(\lambda e + y) - f(y))$ для будь-яких $\lambda > 0$ і $y \in Y$,

а для від'ємних $\lambda = -\mu$ умова $(*)$ переписується у вигляді

$g(e) \geqslant -\frac{1}{\mu}(p(-\mu e + v) - f(v))$ для будь-яких $\mu > 0$ і $v \in Y$.

Отже, для існування потрібного продовження необхідно і достатньо виконання нерівності

$$\sup\left\{-\frac{1}{\mu}(p(-\mu e + v) - f(v)) : \mu > 0, v \in Y\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\left\{\frac{1}{\lambda}(p(\lambda e + y) - f(y)) : \lambda > 0, y \in Y\right\}.$$

Перевіримо це співвідношення. Нехай $\lambda, \mu > 0$; $y, v \in Y$. Переносячи члени, що містять f, в ліву, а що містять p – в праву частину, нерівність

$$-\frac{1}{\mu}\left(p\left(-\mu e+v\right)-f\left(v\right)\right) \leqslant \quad \frac{1}{\lambda}\left(p\left(\lambda e+y\right)-f\left(y\right)\right)$$

зведемо до нерівності

$$\frac{1}{\mu}f\left(v\right)+\frac{1}{\lambda}f\left(y\right) \leqslant \frac{1}{\mu}p\left(-\mu e+\nu\right)+\frac{1}{\lambda}p\left(\lambda e+y\right).$$

Остання ж випливає з умови мажорування для f:

$$\frac{1}{\mu}f\left(v\right)+\frac{1}{\lambda}f\left(y\right)=f\left(\frac{1}{\mu}v+\frac{1}{\lambda}y\right) \leqslant p\left(\frac{1}{\mu}v+\frac{1}{\lambda}y\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\mu}p\left(-\mu e+y\right)+\frac{1}{\lambda}p\left(\lambda e+y\right).$$

Отже, частковий випадок підпростору ковимірності 1 розглянуто.

Доведений факт можна сформулювати так: лінійний функціонал f, заданий на Y і який задовольняє умову мажорування, можна продовжити на лінійну оболонку підпростору Y і довільного одного елемента зі збереженням умови мажорування. Застосовуючи це твердження ще раз, потім ще і ще раз, ми можемо отримати продовження функціонала f на лінійну оболонку підпростору Y і довільного скінченного числа векторів. На жаль, з огляду на нескінченновимірність простору X подібними міркуваннями не завжди вдається отримати продовження на весь простір. Тому для завершення міркувань нам потрібно скористатись лемою Цорна – стандартним способом організації індуктивних міркувань у випадку незліченної кількості потрібних кроків.

Розглянемо Γ – сім'ю всіх пар вигляду (Z, h), де Z – підпростір в X, який містить Y, а h – лінійний функціонал на Z, який збігається на Y з f і задовольняє на Z умову мажорування. По суті, елементи сім'ї Γ – це продовження функціонала f. Нам потрібно довести, що серед елементів $(Z, h) \in \Gamma$ існує такий, що $Z = X$. Введемо на Γ відношення порядку: $(Z_1, h_1) \succ (Z_2, h_2)$, якщо $Z_1 \supset Z_2$ і обмеження функціонала h_1 на Z_2 збігається з h_2. Легко бачити, що впорядкована множина Γ індуктивна. Відтак, за лемою Цорна, в Γ існує максимальний елемент (Z_0, h_0). Якщо б Z_0 не збігалося з усім X, ми могли б, за вже доведеним частковим випадком теореми Гана-Банаха, продовжити h_0 зі збереженням умови мажорування на підпростір вигляду $\mathrm{Lin}\{e, Z_0\}$, який строго містить Z_0. Існування такого продовження суперечило б максимальності пари (Z_0, h_0), тобто $Z_0 = X$, що й потрібно було довести.

$\square$