Теорія міри і інтеграла
Тема 10 “Абсолютно неперервні функції”
Лекція 29

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Функції обмеженої варіації

Абсолютно неперервні функції

Абсолютно неперервні функції та абсолютно неперервні борелеві міри

Відновлення функції за її похідною

Оскільки для більшості слухачів функції обмеженої варіації знайомі з курсу математичного аналізу, ми нагадаємо основні факти без доведень.

Варіацією функції f на відрізку $[a, b]$ називається величина

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \right\},$$

де супремум береться за всіма скінченними диз'юнктними наборами відкритих підвідрізків (a_k, b_k) відрізка $[a, b]$. Якщо $V_a^b(f) < \infty$, то f називається функцією обмеженої варіації на $[a, b]$.

Згідно з означенням, варіація функції – величина невід'ємна, $V_a^b(f) \geqslant |f(b) - f(a)|$

1. Супремум в означенні варіації $V_a^b(f)$ досить брати за такими наборами підвідрізків (a_k, b_k) відрізка $[a, b]$, що $a = a_1 < b_1 = a_2 < ... < b_n = b$. Іншими словами, за диз'юнктними наборами, які дають в об'єднанні весь $[a, b]$, за винятком скінченної кількості точок. Саме в такій формі означення варіації найчастіше подається в літературі.
2. Множина функцій обмеженої варіації на фіксованому відрізку $[a, b]$ утворює лінійний простір.
3. Монотонні функції мають обмежені варіації:

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Відповідно і лінійні комбінації монотонних функцій мають обмежені варіації.
4. $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ для будь-яких $a < c < b$.
5. Кожну функцію f обмеженої варіації можна подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій: $f = f_1 - f_2$, де $f_1(t) = V_a^t(f)$, $f_2(t) = V_a^t(f) - f(t)$.

Функція f на відрізку $[a, b]$ називається абсолютно неперервною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що на будь-якому скінченному наборі неперетинних відкритих підвідрізків $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, \ldots, n$, з $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| \leqslant \delta$ (тобто сумарної довжини, що не перевищує δ), сумарне коливання функції не перевищує ε: $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$.

Зазначимо, що кожна абсолютно неперервна функція неперервна (застосувати означення, взявши за набір відрізків один відрізок довжини, меншої за δ), і будь-яка лінійна комбінація абсолютно неперервних функцій також абсолютно неперервна.

Множина всіх абсолютно неперервних функцій на відрізку $[a, b]$ позначається $AC[a, b]$.

Теорема 1. Нехай $f \in AC[a,b]$. Тоді f – функція обмеженої варіації. Більше того, функції $f_1(t) = V_a^t(f)$ і $f_2(t) = V_a^t(f) - f(t)$ також абсолютно неперервні, тобто f зображається у вигляді різниці $f_1 - f_2$ зростаючих абсолютно неперервних функцій.

Доведення. Візьмемо $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ з означення абсолютної неперервності. Доведемо для будь-яких диз'юнктних $(c_n, d_n) \subset [a,b]$ з $\sum_{n=1}^N |d_n - c_n| \leqslant \delta$ оцінку

$$\sum_{n=1}^N V_{c_n}^{d_n}(f) \leqslant \varepsilon. \tag{$*$}$$

Для цього на кожному з (c_n, d_n) виберемо скінченний набір неперетинних підвідрізків $(a_{k,n}, b_{k,n}) \subset (c_n, d_n)$, $k = 1, 2, \ldots, m_n$. Тоді $\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_n} |b_{k,n} - a_{k,n}| \leqslant \delta$, отже

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_n} \left| f(b_{k,n}) - f(a_{k,n}) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Взявши супремум за всіма наборами $(a_{k,n}, b_{k,n})$, отримуємо бажану умову $(*)$.

Усі твердження теореми випливають з цієї оцінки. Справді, розіб'ємо $[a, b)$ на скінченне число неперетинних підвідрізків $[c_k, d_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, довжина кожного з яких не перевищує δ. Тоді

$$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^{m} V_{c_k}^{d_k}(f) \leqslant m\varepsilon < \infty,$$

тобто f – це функція обмеженої варіації. Далі, умова $(*)$ означає абсолютну неперервність функції f_1, а з нею і функції $f_2 = f_1 - f$. $\square$

Теорема 2. Для функції розподілу F борелевої міри μ на відрізку $[a, b]$ такі умови еквівалентні:

A. F абсолютно неперервна і $F(a) = 0$;

B. Міра μ абсолютно неперервна щодо міри Лебега λ.

Доведення. B⇒A. Нагадаємо спочатку, що міри напіввідкритих підвідрізків можна обчислювати за формулою $\mu((t_1, t_2]) = F(t_2) - F(t_1)$. Якщо $\mu \ll \lambda$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що будь-яка борелева множина $A \subset [a, b]$ з $\lambda(A) < \delta$ має $\mu(A) < \varepsilon$. Розглянемо набір неперетинних відкритих підвідрізків $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, з $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| \leqslant \delta$ і візьмемо $A = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k]$. Тоді $\lambda(A) < \delta$ і, відповідно, $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon$. Цим доведено абсолютну неперервність функції F. Умова ж $F(a) = 0$ випливає з того, що одноточкова множина $\{a\}$ має нульову міру Лебега, отже, і $\mu(\{a\}) = 0$.

A⇒B. Нехай F абсолютно неперервна, $\varepsilon > 0$ – довільне число, і $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ взяте з означення абсолютно неперервної функції. Доведемо спочатку, що $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ для будь-якої відкритої підмножини $A \subset (a, b)$ з $\lambda(A) < \delta$. Справді, така відкрита множина має вигляд $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ з $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| \leqslant \delta$. Тоді $\sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Відповідно,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (F(b_k) - F(a_k)) \leqslant \varepsilon.$$

Доведемо тепер потрібну абсолютну неперервність міри μ щодо міри Лебега. Нехай $D \subset (a, b)$ – множина нульової міри Лебега. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує відкрита множина $A \subset [a, b]$, яка містить D, з $\lambda(A) < \delta(\varepsilon)$. Отже, $\mu(D) \leqslant \mu(A) \leqslant \varepsilon$. З огляду на довільність ε цим доведено потрібну рівність $\mu(D) = 0$. □

Теорема 3. Для функції F на відрізку $[a, b]$ такі умови еквівалентні:

(1) F абсолютно неперервна;

(2) F зображувана у вигляді $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, $f \in L_1[a, b]$ (тобто, $F(x) - F(a)$ – це «первісна» деякої функції з $L_1[a, b]$);

(3) F диференційовна майже скрізь на $[a, b]$, $F' \in L_1[a, b]$, і для будь-якого $x \in [a, b]$ правильна формула Ньютона-Лейбніца $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$.

Доведення. (1)⇒(2). При розгляді цієї імплікації достатньо обмежитися неспадними функціями.

Розглянемо бореліву міру μ на $[a,b]$, для якої функція $F(x) - F(a)$ є функцією розподілу. Оскільки μ абсолютно неперервна щодо міри Лебега λ (теорема 2), ми можемо скористатись теоремою Радона-Никодима: існує така функція $f \in L_1[a,b]$, що $\int_A f d\lambda = \mu(A)$ для всіх борелевих підмножин відрізка $[a,b]$. Підставивши замість A підвідрізок $[a,x]$, отримаємо, що

$$F(x) - F(a) = \mu([a,x]) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

(2)⇒(1). При розгляді цієї імплікації також достатньо обмежитися неспадними функціями. Умова $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ означає, що $F(x) - F(a)$ – це функція розподілу міри λ_f, яка задається рівністю $\lambda_f(A) = \int_A f d\lambda$. Така міра абсолютно неперервна щодо міри Лебега, отже, абсолютно неперервна і її функція розподілу.

(2)$\Rightarrow$(3). Достатньо скористатись теоремою про похідну інтеграла як функції верхньої межі інтегрування.
(3)$\Rightarrow$(2). За f потрібно взяти F'. $\square$