Теорія міри і інтеграла
Тема 9 “Заряди”
Лекція 28

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай ν – заряд, а μ – зліченно-адитивна міра на Σ. Заряд ν називається абсолютно неперервним щодо міри μ (позначення: $\nu \ll \mu$), якщо для будь-якого $A \in \Sigma$ з $\mu(A) = 0$ також і $\nu(A) = 0$.

Теорема 1. Для заряду ν і міри μ такі умови еквівалентні:

(1) $\nu \ll \mu$;

(2) $|\nu| \ll \mu$;

(3) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $A \in \Sigma$, якщо $\mu(A) < \delta$, то $|\nu|(A) < \varepsilon$.

Доведення. (1)$\Rightarrow$(2). Нехай $\mu(A) = 0$. Тоді $\mu(B) = 0$ для будь-якого $B \in \Sigma_A$. Отже, $\nu(B) = 0$ для всіх $B \in \Sigma_A$, тобто величини $\nu^+(A)$, $\nu^-(A)$ і $|\nu|(A)$ дорівнюють нулю.

(2)⇒(3). Припустимо, що умова (3) не виконується. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого $\delta > 0$ існує $A \in \Sigma$ з $\mu(A) < \delta$ і $|\nu|(A) \geqslant \varepsilon$. Застосувавши цю умову з $\delta = 2^{-n}$, отримаємо існування множин $A_n \in \Sigma$ з $\mu(A_n) < 2^{-n}$ і $|\nu|(A_n) \geqslant \varepsilon$. Тоді для множини $B = \overline{\lim} A_n$ маємо $|\nu|(B) \geqslant \varepsilon$ і $\mu(B) = 0$, що суперечить умові $|\nu| \ll \mu$.

(3)⇒(1). Нехай $\mu(A) = 0$. Тоді $\mu(A) < \delta$ для будь-якого $\delta > 0$, відтак, $|\nu|(A) < \varepsilon$ для всіх $\varepsilon > 0$. Отже, $|\nu|(A) = 0$, і, відповідно, $\nu(A) = 0$. $\square$

Базовий приклад. Нехай μ – фіксована міра. Для будь-якого $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ означимо заряд μ_f рівністю $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$. Якщо $\mu(A) = 0$, то й $\int_A f d\mu = 0$; отже, $\mu_f \ll \mu$.

Теорема 2. Нехай $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $A \in \Sigma$, якщо $\mu(A) < \delta$, то $\int\limits_A |f| d\mu < \varepsilon$.

Доведення. Застосуємо до міри $\mu_{|f|}$ теорему 1. $\square$

Теорема 3. Для $f, g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ такі умови еквівалентні:

(1) $f \leqslant g$ майже скрізь за мірою μ;

(2) $\mu_f \leqslant \mu_g$.

Зокрема, $f = g$ майже скрізь за мірою μ тоді і тільки тоді, коли $\mu_f = \mu_g$.

Доведення. Імплікація (1)⇒(2) очевидна. Доведемо зворотну імплікацію. Позначимо через A множину тих $t \in \Omega$, де $f(t) > g(t)$. Тоді, з одного боку, $f - g > 0$ на A і, з іншого боку,

$$\int\limits_A (f-g)d\mu = \mu_f(A) - \mu_g(A) \leqslant 0.$$

Тобто $\mu(A) = 0$. □

Зазначимо ще одне просте, проте корисне переформулювання теореми Леві.

Теорема 4. Нехай $f_n \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ утворюють зростаючу послідовність, і $\mu_{f_n} \leqslant \nu$ для всіх n. Тоді послідовність (f_n) збігається μ-майже скрізь до деякої функції $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, і $\mu_f \leqslant \nu$.

Вправи.

28.1. Знайдіть явні вирази для $(\mu_f)^+$, $(\mu_f)^-$ і $|\mu_f|$.

28.2. Перевірте, що відображення $f \mapsto \mu_f$ лінійне і "поважає" нерівності.

28.3. Знайдіть Ω^+ і Ω^- для заряду μ_f.

Для пари μ, ν мір на Σ введемо в розгляд сім'ю $F(\mu,\nu)$ μ-інтегровних невід'ємних вимірних функцій f, для яких $\mu_f \leqslant \nu$. Далі, введемо величину

$$m(\mu,\nu) = \sup\left\{\int\limits_\Omega f d\mu : f \in F(\mu,\nu)\right\}.$$

Зазначимо, що якщо $0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2$, то $F(\mu,\nu_1) \subset F(\mu,\nu_2)$ і, відповідно, $m(\mu,\nu_1) \leqslant m(\mu,\nu_2)$.
Лема. Якщо μ, ν – міри на Σ, $\nu \ll \mu$ і $m(\mu,\nu) = 0$, то $\nu = 0$.

Доведення. Розглянемо допоміжні заряди $\mu - n\nu$ і відповідні розклади Гана $\Omega = \Omega_n^+ \bigsqcup \Omega_n^-$ для цих зарядів. Покладемо

$$A_1 = \bigcap_{n=1}^\infty \Omega_n^+,\ A_2 = \Omega \setminus A_1 = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n^-.$$

$\Omega = A_1 \bigsqcup A_2$, тому нам достатньо показати, що

$$\nu(A_1) = \nu(A_2) = 0.$$

З оцінки

$$\int\limits_A \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\Omega_n^-} d\mu = \frac{1}{n}\mu\left(A \cap \Omega_n^-\right) \leqslant \nu\left(A \cap \Omega_n^-\right) \leqslant \nu\left(A\right)$$

для будь-якого $A \in \Sigma$, робимо висновок, що $\frac{1}{n}\mathbb{1}_{\Omega_n^-} \in F(\mu, \nu)$. Отже, $\int_\Omega \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\Omega_n^-} d\mu = 0$, тобто $\mu(\Omega_n^-) = 0$ при всіх n. Отож ми показали, що $\mu(A_2) = 0$, а тому й $\nu(A_2) = 0$.

Далі, $A_1 \subset \Omega_n^+$, тобто $(\mu - n\nu)(A_1) \geqslant 0$ при всіх n. Отже, і $\nu(A_1) = 0$. $\square$

Теорема Радона-Никодима. Нехай заряд ν абсолютно неперервний відносно міри μ. Тоді існує єдиний елемент $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, такий що $\mu_f = \nu$, тобто $\int\limits_A f d\mu = \nu(A)$ для всіх $A \in \Sigma$.

Доведення. Теорему достатньо довести для $\nu \geqslant 0$. Загальний випадок можна отримати, розглядаючи окремо задачі на множині додатності і множині від'ємності заряду ν. Ідея доведення полягає в так званому методі вичерпання: шукана функція f будується як сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, кожен з доданків якого «забирає до себе» істотну частину величини $m(\mu, \nu)$, ще не забрану попереднім доданком.

Нагадаємо, що

$$m(\mu,\nu) = \sup\left\{\int_\Omega f d\mu : f \in F(\mu,\nu)\right\}.$$

Візьмемо за f_1 такий елемент множини $F(\mu,\nu)$, що $\int_\Omega f_1 d\mu \geqslant \frac{1}{2} m(\mu,\nu)$. Оскільки $f_1 \in F(\mu,\nu)$, маємо $\nu - \mu_{f_1} \geqslant 0$. Функцію $f_2 \in F\left(\mu, \nu - \mu_{f_1}\right)$ виберемо так, що $\int_\Omega f_2 d\mu \geqslant \frac{1}{2} m\left(\mu, \nu - \mu_{f_1}\right)$. Оскільки $f_2 \in F(\mu, \nu - \mu_{f_1})$, то $\nu - \mu_{f_1+f_2} \geqslant 0$. Продовжимо цей процес, вибираючи на $n+1$-ому кроці функцію $f_{n+1} \in F(\mu, \nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n})$ так, що $\int_\Omega f_{n+1} d\mu \geqslant \frac{1}{2} m\left(\mu, \nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n}\right)$. При цьому на кожному кроці буде виконуватись нерівність $\nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \geqslant 0$ або, що те саме, $\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \leqslant \nu$.

Оскільки всі f_n невід'ємні, частинні суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ утворюють зростаючу послідовність функцій. За теоремою 4, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається μ-майже скрізь до деякої функції $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, і $\mu_f \leqslant v$. За побудовою, $\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \leqslant \mu_f$ при всіх n. Отже,

$$m(\mu, \nu - \mu_f) \leqslant m\left(\mu, \nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n}\right) \leqslant 2 \int_{\Omega} f_{n+1} d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тобто $m(\mu, \nu - \mu_f) = 0$ і, згідно з лемою, $\nu - \mu_f = 0$. □

Функція f з теореми Радона-Никодима називається похідною Радона-Никодима заряду ν за мірою μ і позначається $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Можна довести, що для довільних мір $\nu \ll \mu$ вимірна функція g на Ω інтегровна за мірою ν тоді і тільки тоді, коли функція $g\frac{d\nu}{d\mu}$ інтегровна за мірою μ. При цьому

$$\int_{\Omega} g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_{\Omega} g d\nu.$$