Теорія міри і інтеграла
Тема 9 “Заряди”
Лекція 27

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Заряди. Теорема про обмеженість заряду. Розклад Жордана

Теорема Гана про множини додатності і від'ємності

Сім'я всіх скінчених мір на фіксованій σ-алгебрі не утворює лінійного простору: їх можна додавати, проте вже різниця двох мір може набувати від'ємні значення і, отже, не бути мірою. Це створює певні незручності, і, щоб їх уникнути, вводять узагальнення поняття міри, дозволяючи їй набувати не тільки додатні, але й від'ємні значення. Таку узагальнену міру називають зарядом.

У цьому розділі (Ω, Σ) – множина із заданою на ній σ-алгеброю. Усі функції вважатимемо, якщо не обумовлено інше, визначеними на Ω, а міри й заряди визначеними на Σ.

Відображення $\nu \colon \Sigma \to \mathbb{R}$ називається зарядом, якщо воно задовольняє умову зліченної адитивності: для будь-якої послідовності попарно неперетинних множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$ збігається і $\nu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$.

З означення випливає збіжність вищенаведеного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$ при всіх перестановках доданків, тобто абсолютна збіжність. Багато властивостей мір переносяться на заряди без зміни доведень. Так, заряд порожньої множини дорівнює нулю (взяти в означенні зліченної адитивності всі $A_n = \emptyset$); заряд скінченно-адитивний (покласти $A_n = \emptyset$ для всіх $n > N$). Зокрема, ми будемо користуватись такими твердженнями:

- якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ – зростаючий ланцюжок множин, то $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k)$;
- якщо ж ланцюжок множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ спадає, то $\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k)$.

Проте, працюючи із зарядами, потрібно бути обережним: скажімо, можливо, що $\nu(A) > \nu(B)$ для деяких множин $A \subset B \in \Sigma$ – ситуація, цілком неможлива для мір.

Для зарядів визначені природні операції додавання і множення на скаляр: $(a_1\nu_1 + a_2\nu_2)(A) = a_1\nu_1(A) + a_2\nu_2(A)$, а також нерівності: $\mu \geqslant \nu$, якщо $\mu(A) \geqslant \nu(A)$ для всіх $A \in \Sigma$.
Для $A \in \Sigma$ введемо позначення $\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$. Оскільки за B можна взяти, зокрема, порожню множину, то $\nu^+(A) \geqslant 0$.

Лема 1. Нехай $A = \bigsqcup_{k=1}^\infty A_k$. Тоді $\nu^+(A) = \sum_{k=1}^\infty \nu^+(A_k)$. Іншими словами, ν^+ задовольняє умову зліченної адитивності.
Доведення. Будь-яку $B \in \Sigma_A$ можна зобразити у вигляді $B = \bigsqcup_{n=1}^\infty B_n$ з $B_n \subset A_n$: досить покласти $B_n = B \cap A_n$. Маємо

$$\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\} = \sup\left\{\sum_{n=1}^\infty \nu(B_n) : B_n \in \Sigma_{A_n}, n \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \sup\{\nu(B_n) : B_n \in \Sigma_{A_n}\} = \sum_{n=1}^\infty \nu^+(A_n). \qquad \square$$

Лема 2. Нехай $\nu^+(A) = +\infty$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує вимірна множина $B \subset A$ з $\nu^+(B) = +\infty$ і $|\nu(B)| > n$.
Доведення. Виберемо $B_1 \in \Sigma_A$ з $\nu(B_1) > n + |\nu(A)|$ і покладемо $B_2 = A \setminus B_1$. Тоді $|\nu(B_2)| \geqslant |\nu(B_1)| - |\nu(A)| > n$. Оскільки

$$\nu^+(B_1) + \nu^+(B_2) = \nu^+(A) = +\infty,$$

принаймні одна з величин $\nu^+(B_1)$ і $\nu^+(B_2)$ нескінченна. Відповідну B_i і візьмемо за шукану B. $\square$

Теорема 1. ν^+ – це скінченна зліченно-адитивна міра на Σ.

Доведення. Зліченну адитивність вже доведено в лемі 1. Доведемо скінченність. Нехай існує $A \in \Sigma$ з $\nu^+(A) = +\infty$. За лемою 2, існує $A_1 \in \Sigma_A$ з $\nu^+(A_1) = +\infty$ і $|\nu(A_1)| > 1$. Застосуємо лему 2 ще раз до множини A_1 з $n = 2$ і отримаємо множину $A_2 \subset A_1$ з $\nu^+(A_2) = +\infty$ і $|\nu(A_2)| > 2$. Продовжуючи цей процес, отримуємо спадну послідовність множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ з $|\nu(A_n)| > n$, що суперечить умові $\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \nu\left(A_k\right)$, зазначеній нами на початку пункту. □

Наслідок (обмеженість заряду). Для будь-якого заряду ν існують такі сталі $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, що $C_1 \leqslant \nu(A) \leqslant C_2$ для будь-якого $A \in \Sigma$.

Доведення. Достатньо взяти $C_2 = \nu^+(\Omega)$, $C_1 = -(-\nu)^+(\Omega)$. □

Означення. Міра ν^+ називається додатною частиною заряду ν; міра $\nu^- = (-\nu)^+$ називається від'ємною частиною заряду ν; міра $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ називається варіацією заряду ν.

Теорема 2. Для будь-якого заряду ν справджується розклад Жордана (Jordan): $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Отже, будь-який заряд зображується у вигляді різниці двох мір.
Доведення. Для будь-якого $A \in \Sigma$ маємо

$$\nu^+(A) - \nu(A) = \sup\{\nu(B) - \nu(A) : B \in \Sigma_A\} = \sup\{-\nu(A \setminus B) : B \in \Sigma_A\}.$$

Зробимо заміну $A \setminus B = C$. Коли B пробігає Σ_A, C також пробігає всі Σ_A, тобто $\{A \setminus B : B \in \Sigma_A\} = \Sigma_A$. Відповідно,

$$\nu^+(A) - \nu(A) = \sup\{-\nu(C) : C \in \Sigma_A\} = (-\nu)^+(A) = \nu^-(A). \quad \square$$

Вправа. Доведіть формули $-\nu^-(A) = \inf\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$,
$\nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\} + \inf\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$
і нерівність $|\nu(A)| \leqslant |\nu|(A)$ для будь-якого $A \in \Sigma$.

Лема. Для будь-якого заряду ν на Σ існує множина $\Omega^+ \in \Sigma$ з $\nu^+(\Omega^+) = \nu^+(\Omega)$ і $\nu^-(\Omega^+) = 0$.

Доведення. Зафіксуємо послідовність $\varepsilon_n > 0$ з $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо $A_n \in \Sigma$ з $\nu(A_n) > \nu^+(\Omega) - \varepsilon_n$. Тоді

$$\nu^+(A_n) > \nu^+(\Omega) - \varepsilon_n, \tag{1}$$

$$\nu^-(A_n) = \nu^+(A_n) - \nu(A_n) \leqslant \nu^+(\Omega) - \nu(A_n) \leqslant \varepsilon_n \tag{2}$$

Покладемо $\Omega^+ = \overline{\lim} A_n$. Згідно з пунктом (i) леми про верхню границю множин, застосованим до міри ν^+, з оцінки (1) випливає, що

$$\nu^+(\Omega^+) \geqslant \overline{\lim}\, \nu^+(A_n) = \nu^+(\Omega).$$

Пункт (ii) тієї ж леми, але застосований до ν^-, дає рівність $\nu^-(\Omega^+) = 0$: тут використовується оцінка (2). □

Теорема Гана. Для будь-якого заряду ν існує розклад множини $\Omega = \Omega^+ \sqcup \Omega^-$, $\Omega^+, \Omega^- \in \Sigma$, який має властивість, що для будь-якої підмножини в Ω^+ заряд більший або дорівнює нулю, а для будь-якої підмножини в Ω^- заряд менший або дорівнює нулю. Такий розклад єдиний з точністю до $|\nu|$-еквівалентності.

Доведення. Візьмемо за Ω^+ відповідну множину з попередньої леми. Оскільки $\nu^-(\Omega^+) = 0$, заряд жодної підмножини в Ω^+ не може бути від'ємним. Покладемо $\Omega^- = \Omega \backslash \Omega^+$. Оскільки

$$\nu^+(\Omega^-) = \nu^+(\Omega) - \nu^+(\Omega^+) = 0,$$

заряд жодної підмножини в Ω^- не може бути додатним. Цим доведено існування розкладу. Перейдемо до питання єдиності. Нехай $\Omega_1^+ \bigsqcup \Omega_1^-$ – інший розклад з такими самими властивостями. Тоді $\nu^-(\Omega_1^+) = 0$, $\nu^-(\Omega^+) = 0$ і, отже, $\nu^-(\Omega_1^+ \triangle \Omega^+) = 0$. Подібно, $\nu^+(\Omega_1^- \triangle \Omega^-) = 0$. Але $\Omega_1^+ \triangle \Omega^+ = \Omega_1^- \triangle \Omega^-$, тому також $\nu^+(\Omega_1^+ \triangle \Omega^+) = 0$ і $\nu^-(\Omega_1^- \triangle \Omega^-) = 0$. Отже, $|\nu| (\Omega_1^+ \triangle \Omega^+) = |\nu| (\Omega_1^- \triangle \Omega^-) = 0$. □

Множини Ω^+ і Ω^- називаються відповідно множиною додатності і множиною від'ємності заряду ν, а зображення $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ – розкладом Гана. (Hans Hahn)

Вправа. $\nu^+(A) = \nu(A \cap \Omega^+)$, $\nu^-(A) = -\nu(A \cap \Omega^-)$.