Теорія міри і інтеграла
Тема 8 “Зв’язок між похідною та інтегралом Лебега”
Лекція 26

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Щільність $C[a,b]$ в $L_1[a,b]$

Інтеграл похідної

Похідна інтеграла як функції верхньої межі інтегрування

Теорема Лебега про точки щільності множини на відрізку

$L_1[a,b]$ – це простір інтегровних за Лебегом функцій на відрізку $[a,b]$. Норма на $L_1[a,b]$ задається формулою

$$\|f\| = \int\limits_a^b |f(t)|dt.$$

При цьому функції, які дорівнюють одна одній майже скрізь, ототожнюються між собою.

Теорема 1. Множина $C[a,b]$ неперервних функцій щільна в $L_1[a,b]$.

Доведення. Позначимо E множину обмежених інтегровних функцій на $[a,b]$. Спочатку доведемо, що E щільна в $L_1[a,b]$. Розгляномо довільну $g \in L_1[a,b]$. Означимо зрізки

$$g_n = \min\{n, \max\{g, -n\}\}.$$

Послідовність функцій $|g_n - g|$ прямує майже скрізь до нуля і має інтегровну мажоранту $|g|$. Отже, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, $\|g_n - g\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Тепер доведемо, що множина $C[a,b]$ неперервних функцій щільна в E. Розглянемо $f \in E$. Ми вже доводили, що існує послідовність (f_n) неперервних функцій, збіжна до f майже скрізь. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що всі f_n обмежені за модулем тією самою сталою C, що й f (інакше замінимо f_n зрізками $\tilde{f}_n = \min\{C, \max\{f_n, -C\}\}$). Збіжність $\|f_n - f\|$ до 0 випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність. □

Теорема 2. Нехай $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ – зростаюча функція. Тоді $f' \in L_1[a,b]$, і $\int\limits_a^b f'(t)dt \leqslant f(b) - f(a)$.

Доведення. Зафіксуємо збіжну до нуля послідовність $\varepsilon_n > 0$ і розглянемо розділені різниці $f_n(t) = \frac{f(t+\varepsilon_n)-f(t)}{\varepsilon_n}$. Щоб ця формула мала сенс на всьому відрізку $[a,b]$, покладемо $f(x) = f(b)$ при $x > b$. Функції f_n інтегровні, невід'ємні, і

$$\int\limits_{[a,b]} f_n(t)dt = \frac{1}{\varepsilon_n}\int\limits_{[a,b]}\Big(f(t+\varepsilon_n) - f(t)\Big)dt = \frac{1}{\varepsilon_n}\Big(\int\limits_{[a+\varepsilon_n,b+\varepsilon_n]} f(t)dt -$$

$$-\int\limits_{[a,b]} f(t)dt\Big) = \frac{1}{\varepsilon_n}\Big(\int\limits_{[b,b+\varepsilon_n]} f(t)dt - \int\limits_{[a,a+\varepsilon_n]} f(t)dt\Big) \leqslant f(b) - f(a).$$

Далі, $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f'$ на $[a,b]$. Отже, за лемою Фату, функція f' інтегровна на $[a,b]$ і

$$\int_a^b f'(t)dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt \leqslant f(b) - f(a). \qquad \square$$

Приклад зростаючої функції з $\int_a^b f'(t)dt \neq f(b) - f(a)$: $f = \mathbb{1}_{[1/2\,,1]}$, $[a,b] = [0,1]$.
Навіть для неперервної зростаючої функції f формула Ньютона-Лейбніца може не виконуватись. Приклад – «канторова драбина»

Канторова драбина. Як звичайно, канторова множина позначатиметься через $\mathcal{K}$, а відрізки довжини $1/3^n$, які викидаються з $[0,1]$ на n-му кроці побудови канторової множини, – через Δ_j^n, $j = 1, 2, ..., 2^{n-1}$. При фіксованому n відрізки Δ_j^n нумеруватимемо в порядку зростання: $\Delta_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\Delta_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $\Delta_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ і т. д.

Означимо функцію F у такий спосіб: покладемо $F(t) = \frac{1}{2}$ на Δ_1^1, $F(t) = \frac{1}{4}$ на Δ_1^2, $F(t) = \frac{3}{4}$ на Δ_2^2, ... , на Δ_j^n задамо $F(t) = \frac{2j-1}{2^n}$, ... Ми вже означили функцію на щільній множині – доповненні до $\mathcal{K}$. Легко бачити, що ця функція рівномірно неперервна на $[0,1]\backslash\mathcal{K}$: якщо $|x-y| < \frac{1}{3^n}$, то $|F(x) - F(y)| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Тому, F єдиним способом продовжується до неперервної функції на всьому відрізку. Отримана монотонна неперервна функція називається канторовою драбиною.

Нехай $f \in L_1[a,b]$, F – «первісна» функції f: $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Теорема 3. Для будь-якої $f \in L_1[a,b]$ функція F неперервна на $[a,b]$.

Доведення. На дошці. $\square$

Лема. Для будь-якої $f \in L_1[a,b]$ функція F диференційовна майже скрізь, $F' \in L_1[a,b]$ і $\int_a^b |F'(t)|\,dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Доведення. Запишемо F у вигляді різниці $F = F_1 - F_2$ з $F_1(x) = \int_a^x f^+(t)dt$ і $F_2(x) = \int_a^x f^-(t)dt$. Функції F_1 і F_2 монотонні, отже, і вони, і F диференційовні майже скрізь, і їх похідні інтегровні. Далі,

$$\int_a^b |F'(t)|\,dt = \int_a^b |F_1'(t) - F_2'(t)|\,dt \leqslant \int_a^b F_1'(t)dt + \int_a^b F_2'(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a) = \int_a^b f^+(t)dt + \int_a^b f^-(t)dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Теорема 4. $F' \overset{\text{м.с.}}{=} f$ для будь-якої функції $f \in L_1[a, b]$. Іншими словами, похідна інтеграла Лебега як функції верхньої межі інтегрування майже скрізь дорівнює підінтегральній функції.

Доведення. Розглянемо лінійний оператор T, що діє з $L_1[a, b]$ в $L_1[a, b]$ за правилом $Tf = F' - f$. За попередньою лемою,

$$\|Tf\| = \int_a^b \left|F'(t) - f(t)\right| dt \leqslant 2 \int_a^b |f(t)|\, dt = 2\, \|f\|,$$

тобто оператор T неперервний. Для $f \in C[a, b]$, на підставі відомої теореми аналізу, $Tf = 0$. Оскільки множина $C[a, b]$ неперервних функцій щільна в $L_1[a, b]$, звідси випливає, що $T = 0$ на всьому $L_1[a, b]$, що й потрібно було довести. $\square$

Нехай A – вимірна за Лебегом підмножина відрізка $[a, b]$. Щільністю множини A в точці $x \in [a, b]$ називається границя (якщо вона існує) при $\alpha, \beta \to +0$ виразу $\frac{\lambda([x-\alpha, x+\beta]\cap A)}{\alpha+\beta}$.

Теорема Лебега про точки щільності. Для майже всіх точок множини A щільність існує і дорівнює 1.

Доведення. На дошці. $\square$