# Теорія міри і інтеграла
# Тема 7 “Нормований простір $L_1$”
## Лекція 25

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

# Зміст лекції

Нехай $X$ – лінійний простір над полем дійсних або комплексних чисел. Відображення $x \mapsto \|x\|$, яке ставить кожному елементові простору $X$ у відповідність невід'ємне число, називається нормою, якщо воно задовольняє такі аксіоми:

(1) якщо $\|x\| = 0$, то $x = 0$ (невиродженість);

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ для будь-якого $x \in X$ і будь-якого скаляра $\lambda$;

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Означення. Лінійний простір $X$, наділений нормою, називається нормованим простором.

Відстанню між елементами $x_1, x_2$ нормованого простору $X$ називається величина $\rho(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\|$. З аксіом норми випливає, що $\rho$ справді задає метрику на $X$.

**Теорема 1.** Нехай $X$, $Y$ – нормовані простори. Для лінійного оператора $T\colon X \to Y$ такі умови еквівалентні:

(1) $T$ неперервний;

(2) $T$ переводить збіжні до нуля послідовності у збіжні до нуля;

(3) $T$ переводить збіжні до нуля послідовності в обмежені;

(4) $T$ обмежений, тобто обмежені послідовності він переводить в обмежені послідовності;

(5) існує така стала $C > 0$, що для будь-якого $x \in X$ виконується оцінка $\|Tx\| \leqslant C\,\|x\|$.

**Доведення.** На дошці $\square$

Нехай $A, A_1, A_2$ – підмножини лінійного простору $X$, $t$ – скаляр. Позначимо $tA = \{ta\colon a \in A\}$,

$$A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2\colon a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\},$$
$$A_1 - A_2 = \{a_1 - a_2\colon a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}.$$

Вправи

25.1. $0 \in A_1 - A_2$ тоді і тільки тоді, коли $A_1$ і $A_2$ перетинаються.
25.2. Якщо $A_1$ і $A_2$ – підпростори, то $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ також буде підпростором.
25.3. Якщо $A_1$ і $A_2$ – підпростори, то $\mathrm{Lin}\,(A_1 \cup A_2) = A_1 + A_2$.
25.4. Нехай $A_1$ і $A_2$ – замкнені відрізки на площині. Якою геометричною фігурою буде $A_1 + A_2$? В якому випадку $A_1 + A_2$ буде відрізком?
25.5. Нехай $A$ – замкнена множина на площині. Довести, що $A + A = 2A$ тоді і тільки тоді, коли $A$ опукла.

Нехай $X$ – лінійний простір, $Y$ – підпростір в $X$. Введемо таке відношення еквівалентності на $X$: $x \sim y$, якщо $x - y \in Y$. Класом еквівалентності елемента $x$ є множина

$$[x] = x + Y = \{x + y : \; y \in Y\} .$$

Множина таких класів еквівалентності, наділена описаними вище операціями фактор-простором простору $X$ за підпростором $Y$ і позначається $X/Y$. Зазначимо найпростіші властивості лінійних операцій на фактор-просторі, з яких випливає, зокрема, що фактор-простір є лінійним простором.

1. Клас еквівалентності нуля – нульовий елемент фактор-простору.
2. $\lambda_1[x_1] + \lambda_2[x_2] = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2]$:

   $$\lambda_1[x_1] + \lambda_2[x_2] = \lambda_1(x_1 + Y) + \lambda_2(x_2 + Y) =$$
   $$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (\lambda_1 Y + \lambda_2 Y) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + Y = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2].$$

Нехай $(\Omega, \Sigma, \mu)$ – простір з мірою (скінченною або $\sigma$-скінченною), $E$ – лінійний простір всіх інтегровних за мірою $\mu$ скалярних функцій на $\Omega$, $F$ – підпростір в $E$, який складається з усіх функцій, що дорівнюють майже скрізь нулю. Через $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначимо фактор-простір $E/F$. Для спрощення термінології прийнято говорити, що елементами простору $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ є інтегровні функції на $\Omega$, але при цьому функції, які дорівнюють одна одній майже скрізь, ототожнюються між собою. Норма на $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ задається формулою

$$\|f\| = \int_{\Omega} |f(t)| d\mu.$$

Важливий частковий випадок простору $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ – це простір $L_1[a, b]$ інтегровних за Лебегом функцій на відрізку $[a, b]$. У цьому випадку $\Omega = [a, b]$, $\Sigma$ – сім'я всіх вимірних за Лебегом підмножин відрізка, а $\mu$ – міра Лебега $\lambda$.