Теорія міри і інтеграла
Тема 6 "Інтеграл Лебега"
Лекція 24

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною мірою. Сім'я E інтегровних на Ω функцій називається монотонним класом функцій, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

(1) якщо $f_1, f_2 \in E$, то $a_1 f_1 + a_2 f_2 \in E$ для будь-яких скалярів a_1, a_2 (лінійність);

(2) якщо $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \in E$, f_n утворюють неспадну послідовність, збіжну в кожній точці до деякої функції f, і $\sup\limits_n \int\limits_\Omega f_n d\mu = C < \infty$, то $f \in E$) (аналог теореми Леві);

(3) якщо $f \in E$, $f \geqslant 0$ і $\int_\Omega f d\mu = 0$, то всі функції g, що підпорядковуються нерівності $0 \leqslant g \leqslant f$, також лежать в E (аналог повноти).

Зазначимо, що переходом від f_n до $-f_n$ легко одержати ще одну властивість монотонного класу:

$(2')$ якщо $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \in E$, f_n утворюють незростаючу послідовність, збіжну в кожній точці до деякої функції f і $\inf\limits_n \int\limits_\Omega f_n d\mu > -\infty$, то $f \in E$.

Теорема про монотонний клас функцій. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною мірою, отриманий продовженням за схемою Лебегаміри μ з деякого півкільця з одиницею $\Phi \subset \Sigma$, E – монотонний клас функцій, який містить характеристичні функції всіх елементів півкільця Φ. Тоді E збігається із множиною всіх інтегровних на Ω функцій.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{M}$ сім'ю всіх множин, характеристичні функції яких належать до E. $\mathcal{M}$ – це монотонний клас множин, який містить Φ як підклас. За теоремою про монотонний клас множин (Лекція 9), $\mathcal{M} = \Sigma$. Отже, до класу E належать характеристичні функції всіх вимірних підмножин.

Кожна скінченнозначна інтегровна функція має вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$$

з $A_k \in \Sigma$, і за лінійністю всі такі функції лежать в E. Будь-яка невід'ємна зліченнозначна інтегровна функція $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{A_k}$, $a_k \geqslant 0$ є границею неспадної послідовності $f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ скінченнозначних і, отже, також лежить в E. Будь-яку інтегровну невід'ємну функцію можна зобразити у вигляді границі неспадної послідовності невід'ємних зліченнозначних інтегровних функцій, і, нарешті, будь-яка інтегровна функція f зображується у вигляді різниці $f = f^{+} - f^{-}$ двох невід'ємних інтегровних функцій. $\square$

Нехай $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ і $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ – простори зі скінченними мірами, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Прямокутниками в Ω назвемо множини вигляду $A_1 \times A_2$, де $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Через Φ позначимо сім'ю всіх прямокутників в Ω.

Теорема 1. Сім'я Φ всіх прямокутників в Ω утворює півкільце з одиницею.

Доведення. Нехай $A = A_1 \times A_2$ і $B = B_1 \times B_2$ – довільні прямокутники. Тоді $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$, тобто знову є прямокутником. Далі,

$$\Omega \backslash A = ((\Omega_1 \backslash A_1) \times \Omega_2) \cup (A_1 \times (\Omega_2 \backslash A_2)),$$

тобто доповнення до прямокутника зображується у вигляді диз'юнктного об'єднання двох прямокутників. Нарешті, весь простір Ω – також прямокутник. □

Означимо міру μ на Φ рівністю $\mu(A) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$.

Теорема 2. Міра μ на Φ зліченно-адитивна.

Доведення. Нехай $A = A_1 \times A_2$, $B_n = A_{1,n} \times A_{2,n}$, прямокутники B_n попарно не перетинаються і в об'єднанні дають прямокутник A. Для будь-якого $t \in A_1$ позначимо через $N(t)$ множину тих індексів n, для яких $A_{1,n}$ містить t. Тоді сім'я множин $A_{2,n}$, $n \in N(t)$ диз'юнктна, і $\bigcup_{n\in N(t)} A_{2,n} = A_2$. Введемо в розгляд допоміжні функції на A_1: $f_n = \mu_2(A_{2,n})\mathbb{1}_{A_{1,n}}$. Ці функції інтегровні за мірою μ_1, й інтеграли дорівнюють $\mu(B_n)$. Зазначимо, що для будь-якого $t \in A_1$ виконані співвідношення

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n\in N(t)} \mu_2(A_{2,n}) = \mu_2\Big(\bigcup_{n\in N(t)} A_{2,n}\Big) = \mu_2(A_2).$$

Залишається проінтегрувати обидві частини рівності, що можливо за теоремою Леві про ряди, щоб отримати потрібну рівність $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \mu(A)$. □

Застосуємо схему Лебегівську продовження мір до міри μ на Φ. Отриманий простір з мірою (Ω, Σ, μ) називається добутком просторів $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ і $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Для міри μ використовують позначення $\mu_1 \times \mu_2$, а елементи одержаної σ-алгебри Σ називають ще $\mu_1 \times \mu_2$-вимірними множинами. Зрозуміло, що σ-алгебра Σ включають як підсистему найменшу σ-алгебру, яка містить всі прямокутники (останню ми позначали $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$).

В цьому розділі $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ і $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ будуть повними просторами зі скінченними мірами, а через (Ω, Σ, μ) позначатимемо добуток цих просторів. Кожен елемент множини Ω має вигляд (t_1, t_2), де $t_1 \in \Omega_1$, $t_2 \in \Omega_2$. Тому кожну функцію f, означену на Ω, доцільно розглядати як функцію двох змінних $f(t_1, t_2)$, а інтеграл $\int_\Omega f d\mu$ за аналогією з тим, як це робилось у курсі аналізу, природно називати подвійним інтегралом. При розгляді інтеграла за однією зі змінних при фіксованій другій змінній ми будемо використовувати вирази типу $\int_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1)$, де умовне позначення $d\mu_1(t_1)$ підкреслює, за якою змінною йде інтегрування.

Означення. Для функції $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ існує **повторний інтеграл**

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2),$$

якщо для майже всіх значень змінної $t_2 \in \Omega_2$ функція $f(t_1, t_2)$ інтегровна на Ω_1 за мірою μ_1 як функція змінної t_1 і функція

$$g(t_2) = \int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1)$$

інтегровна на Ω_2 за мірою μ_2 як функція змінної t_2.

Теорема Фубіні. Якщо функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ інтегровна на Ω за сукупністю змінних (тобто існує $\int_\Omega f d\mu$), то для f існує повторний інтеграл, і подвійний інтеграл дорівнює повторному:

$$\int\limits_{\Omega} f d\mu = \int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f\left(t_1, t_2\right) d\mu_1\left(t_1\right) \right] d\mu_2\left(t_2\right).$$

Доведення. Будемо говорити, що функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ належить до класу Фубіні ($f \in \mathrm{Fub}(\mu)$), якщо f інтегровна за мірою μ на Ω, для f існує повторний інтеграл, і подвійний інтеграл дорівнює повторному. Нам потрібно довести, що клас Фубіні збігається з класом усіх функцій, інтегровних за сукупністю змінних. Оскільки клас Фубіні містить характеристичні функції всіх прямокутників, достатньо перевірити, що клас Фубіні є монотонним класом. Перша з аксіом монотонного класу – лінійність – перевіряється зовсім просто. Перевірка ж другої і третьої аксіом вимагає певних зусиль.

Потрібно довести такі два твердження.

A. Якщо $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \in \mathrm{Fub}(\mu)$, f_n утворюють неспадну послідовність, збігаються в кожній точці до деякої функції f і $\sup\limits_n \int\limits_\Omega f_n d\mu = C < \infty$, то $f \in \mathrm{Fub}(\mu)$.

B. Якщо $f \in \mathrm{Fub}(\mu)$, $f \geqslant 0$, $\int\limits_\Omega f d\mu = 0$ і функція g задовольняє нерівність $0 \leqslant g \leqslant f$, то $g \in \mathrm{Fub}(\mu)$.

Почнемо з твердження A. Позначимо $\int_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1)$ через $g_n(t_2)$. За умовою, функції g_n визначені майже скрізь та інтегровні на Ω_2; $\int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \int\limits_\Omega f_n d\mu$. Далі, g_n утворюють майже скрізь неспадну послідовність функцій, і

$$\sup_n \int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \sup_n \int\limits_\Omega f_n d\mu = C < \infty.$$

Згідно з теоремою Леві, послідовність (g_n) майже скрізь на Ω_2 збігається до деякої інтегровної функції g, і

$$\int\limits_{\Omega_2} g d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n d\mu. \qquad (1)$$

Позначимо через D множину тих точок $t_2 \in \Omega_2$, для яких визначені $g_n(t_2)$ і $g(t_2)$, $\int_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) = g_n(t_2)$, $g_n(t_2)$ не спадають зі зростанням n і збігаються до $g(t_2)$. За побудовою, $\mu_2(\Omega_2 \setminus D) = 0$. У кожній точці $t_2 \in D$ функції f_n інтегровні за змінною t_1, не спадають зі зростанням n і збігаються до функції f. Крім того, виконані співвідношення

$$\int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) = g_n(t_2) \leqslant g(t_2) < \infty.$$

Знову застосовуючи теорему Леві, але тепер вже за змінною t_1, отримуємо, що для будь-якого $t_2 \in D$ (тобто для майже всіх значень змінною t_2) функція f інтегровна за t_1, і

$$\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) = \lim_{n\to\infty} g_n(t_2) = g(t_2). \qquad (2)$$

Нарешті, теорема Леві, застосована до функцій f_n на Ω (тобто за сукупністю змінних), дає рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n d\mu = \int\limits_{\Omega} f d\mu$.

Зіставляючи співвідношення (1), (2) і останню рівність, одержуємо, що

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)=\int\limits_{\Omega_2} g d\mu_2 =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} f_n d\mu=\int\limits_{\Omega} f d\mu,$$

тобто $f\in \mathrm{Fub}(\mu)$.

Тепер доведемо твердження B. По-перше, зі співвідношень $0\leqslant g\leqslant f$ і $\int_\Omega f d\mu = 0$ випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} g d\mu = 0. \tag{3}$$

Далі, позначимо $\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1)$ через $h(t_2)$. Оскільки $f \in Fub(\mu)$, функція h визначена майже скрізь на Ω_2, інтегровна, і

$$\int\limits_{\Omega_2} h d\mu_2 = \int\limits_{\Omega} f d\mu = 0.$$

З огляду на невід'ємність, функція h майже скрізь на Ω_2 дорівнює нулю. Позначимо через D множину тих точок $t_2 \in \Omega_2$, для яких $h(t_2) = 0$. Доповнення до множини D в Ω_2 має нульову міру, і при кожному фіксованому $t_2 \in D$ функція $f(t_1, t_2)$ інтегровна на Ω_1 за змінною t_1, і $\int_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) = 0$. Знову з огляду на додатність при кожному фіксованому $t_2 \in D$ для майже всіх $t_1 \in \Omega_1$ значення $f(t_1, t_2)$ дорівнює нулю. Але на підставі нерівності $0 \leqslant g \leqslant f$ в тих точках, де $f(t_1, t_2) = 0$, там і $g(t_1, t_2) = 0$.

Тому, при кожному фіксованому $t_2 \in D$ для майже всіх $t_1 \in \Omega_1$ значення $g(t_1, t_2)$ дорівнює нулю. Отже, при $t_2 \in D$ (тобто для майже всіх значень змінної t_2) функція g інтегровна за t_1, і $\int_{\Omega_1} g(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) = 0$. Зіставивши останній запис із рівністю (3), одержуємо належність функції g до класу Фубіні. $\square$

Зауваження. Оскільки змінні t_1 і t_2 в умовах теореми Фубіні рівноправні, то можна поміняти їх місцями у твердженні теореми. Тому, якщо існує подвійний інтеграл, то визначені повторні інтеграли в обох можливих порядках інтегрування, й обидва дорівнюють подвійному інтегралу. Отже,

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2) = \int\limits_{\Omega_1} \left[\int\limits_{\Omega_2} f(t_1, t_2)\, d\mu_2(t_2) \right] d\mu_1(t_1).$$

Саме в цій формі теорема Фубіні найчастіше застосовується.

Теорема Тонеллі. Нехай f – вимірна невід'ємна функція на Ω, для якої існує повторний інтеграл $\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)$.
Тоді для f існує подвійний інтеграл, і, отже,
$\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)=\int\limits_{\Omega_1}\left[\int\limits_{\Omega_2} f(t_1,t_2)\,d\mu_2(t_2)\right]d\mu_1(t_1)$.

Доведення. Введемо у розгляд множини $A_n=\{t\in\Omega: f(t)\leqslant n\}$ і функції $f_n=f\cdot\mathbb{1}_{A_n}$. Кожна функція f_n вимірна й обмежена на Ω, отже, інтегровна за сукупністю змінних. Далі,

$$\int\limits_{\Omega} f_n d\mu=\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2),$$

тобто $\int_\Omega f_n d\mu$ обмежені зверху сталою, яка не залежить від n. Нарешті, f_n утворюють неспадну послідовність і прямують поточково до f. Для завершення доведення залишається застосувати теорему Леві. $\square$

Корисна формула. Нехай A – вимірна підмножина в $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Для будь-якого $t_1 \in \Omega_1$ позначимо через A_{t_1} множину тих $t_2 \in \Omega_2$, для яких $(t_1, t_2) \in A$. Тоді $A_{t_1} \in \Sigma_2$ для майже всіх $t_1 \in \Omega_1$ і $\mu(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{t_1})\, d\mu_1(t_1)$.