Теорія міри і інтеграла
Тема 6 “Інтеграл Лебега”
Лекція 23

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Лема Фату. Нехай на множині $A \in \Sigma$ задано послідовність (f_n) інтегровних функцій; $f_n \geqslant 0$, послідовність (f_n) збігається майже скрізь до деякої вимірної функції f, й інтеграли функцій (f_n) обмежені в сукупності: $\int\limits_A f_n d\mu \leqslant C < \infty$. Тоді f інтегровна й

$$\int\limits_A f d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Теорема Лебега про мажоровану збіжність. Нехай на множині A задано послідовність (f_n) інтегровних функцій, збіжну майже скрізь до вимірної функції f. Нехай далі у послідовності (f_n) є інтегровна мажоранта g (тобто g інтегровна і $|f_n| \leqslant g$ при всіх n). Тоді гранична функція f інтегровна і

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Теорема Леві про монотонні послідовності. Нехай $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots$ – неспадна послідовність інтегровних функцій на A, й інтеграли функцій f_n обмежені в сукупності деякою сталою $C < \infty$. Тоді послідовність (f_n) прямує майже скрізь до деякої інтегровної функції f, і

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що всі $f_n \geqslant 0$ (загальний випадок зводиться до цього часткового введенням допоміжних функцій $f_n - f_1$). З монотонності в кожній точці $t \in A$ випливає, що послідовність $(f_n(t))$ прямує або до скінченної границі, або до $+\infty$. Позначимо через B множину тих $t \in A$, де $f_n(t) \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Доведемо, що B – множина нульової міри.

Для будь-яких $n, m \in \mathbb{N}$ покладемо $B_{n,m} = \{t \in A : f_n(t) > m\}$, $B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,m}$. Іншими словами, B_m – це множина тих точок $t \in A$, де всі f_n, починаючи з деякого номера, більші за число m. Відповідно, $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$. За нерівністю Чебишова,

$$\mu(B_{n,m}) \leqslant \frac{1}{m} \int\limits_A f_n d\mu \leqslant \frac{C}{m}.$$

Оскільки при фіксованому m множини $B_{n,m}$ зростають зі зростанням n, $\mu(B_m) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_{n,m}) \leqslant \frac{C}{m}$. У свою чергу, множини B_m спадають зі зростанням m, тобто

$$\mu(B) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{C}{m} = 0.$$

Тепер визначимо функцію f на B довільним способом (наприклад, покладемо $f = 0$ на B), а на $A \backslash B$, де, за побудовою, в кожній точці існує скінченна границя послідовності $(f_n(t))$, покладемо $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$. При такому означенні послідовність f_n збігається майже скрізь до f, і, за лемою Фату, функція f інтегровна. Далі, f є інтегровною мажорантою для всіх f_n, і для завершення доведення нам потрібно лише застосувати теорему Лебега про мажоровану збіжність. $\square$

Теорема Леві про ряди. Нехай на множині A задана послідовність (f_n) невід'ємних інтегровних функцій і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_A f_n d\mu < \infty$.
Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f, і

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Вправи

23.1. Використовуючи зображення функції у вигляді різниці її додатної і від'ємної частин, доведіть таке посилення теореми Леві про ряди: нехай функції f_n інтегровні на множині A і $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f_n| d\mu < \infty$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f, і $\int\limits_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu$.

23.2. Доведіть, що умову $f_n \leqslant f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ у формулюванні теореми Леві про монотонні послідовності можна замінити умовою «для всіх $n \in \mathbb{N}$ $f_n \leqslant f_{n+1}$ майже скрізь».

Ми вже зазначали, що кожна інтегровна за Ріманом функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровна і за Лебегом. Більше того, за теоремою всі обмежені вимірні функції на відрізку є інтегровними за Лебегом.

Якщо функція інтегровна за Ріманом, то вона повинна бути обмеженою. Тому в курсі математичного аналізу детально вивчався невластивий інтеграл як спосіб визначення інтеграла для деяких необмежених на відрізку функцій. Щоб краще відчути природу інтеграла Лебега, нижче ми розберемо зв'язок між невластивим інтегралом та інтегралом Лебега.

Теорема 1. Нехай функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ неперервна скрізь, крім точки a, й інтегровна за Лебегом на $[a,b]$. Тоді існує невластивий інтеграл $\int_a^b f(t)dt$, і цей невластивий інтеграл дорівнює відповідному інтегралу Лебега $\int_{[a,b]} fd\lambda$.

Доведення. Нехай $a_n \in [a,b]$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Введемо в розгляд допоміжні функції $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b]}$. Функції f_n утворюють майже скрізь збіжну до f послідовність інтегровних (як за Ріманом, так і за Лебегом) функцій, причому $|f|$ є інтегровною мажорантою для всіх f_n. Згідно з теоремою Лебега,

$$\int_{a_n}^b f(t)dt = \int\limits_{[a_n,b]} fd\lambda = \int\limits_{[a,b]} f_n d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{[a,b]} fd\lambda.$$

Але, за означенням, це й означає, що існує невластивий інтеграл, який дорівнює $\int_{[a,b]} fd\lambda$. $\square$

Теорема 2. Нехай функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ неперервна скрізь, крім точки a, і невід'ємна. Тоді, якщо існує невластивий інтеграл $\int_a^b f(t)dt$, то f інтегровна за Лебегом на $[a,b]$.

Доведення. Нехай a_n і (f_n) – ті самі, що й у доведенні попередньої теореми. Послідовність (f_n) не спадає і прямує майже скрізь до функції f. Далі, за означенням невластивого інтеграла, $\int_{[a,b]} f_n d\lambda = \int_{[a_n,b]} f d\lambda$ прямує до $\int_a^b f(t)dt$ при $n \to \infty$. Залишається застосувати теорему Леві про монотонні послідовності. □

З курсу математичного аналізу читачеві добре відомі приклади функцій, для яких існує невластивий інтеграл, але модуль яких неінтегровний навіть у невластивому сенсі. Такі функції неінтегровні за Лебегом, оскільки в інтегровної за Лебегом функції модуль також повинен бути інтегровним за Лебегом. Надалі якщо функція інтегровна за Лебегом на відрізку, то для інтеграла Лебега ми використовуватимемо як позначення $\int_{[a,b]} f(t)d\lambda$, так і більш звичне з курсу аналізу $\int_a^b f(t)dt$.

Щоб успішно означити інтеграл Лебега на осі чи, скажімо, на необмеженій підмножині площини, нам потрібно розглянути випадок зліченно-адитивних мір, які набувають на деяких елементах σ-алгебри Σ значення $+\infty$. Такі міри називатимемо нескінченними.

Отож, нехай (Ω, Σ, μ) – простір з нескінченною мірою. Підмножина $A \in \Sigma$ називається множиною σ-скінченної міри (інший термін – міра μ σ-скінченна на A), якщо A можна зобразити у вигляді об'єднання зліченного числа множин скінченної міри. Якщо міра μ σ-скінченна на A, то A можна записати у вигляді $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $0 < \mu(A_n) < \infty$. Зазначимо також, що зліченне об'єднання множин σ-скінченної міри знову є множиною σ-скінченної міри.

Для функцій, визначених на множині A σ-скінченної міри, можна ввести розбиття множини A на підмножини скінченної міри. Можна також ввести інтегральні суми й інтеграл Лебега у такий самий спосіб, як ми це робили вище для множин скінченної міри і побудувати аналогічну теорію.

Ми ж розповімо про обхідний шлях, який дозволяє за допомогою деякого штучного прийому звести інтегровність за σ-скінченною мірою до вже розібраного випадку інтеграла за скінченною мірою. Це дозволить звести властивості інтеграла за σ-скінченною мірою до вже відомих нам результатів.

Нехай A – множина σ-скінченної міри. Зафіксуємо деяке зображення множини A у вигляді $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_n \in \Sigma$ і $0 < \mu(A_n) < \infty$. Поняття інтеграла на кожній множині скінченної міри, зокрема на кожній з A_n, нам вже відоме. Відштовхуючись від цього, можна ввести таке означення:

Назвемо функцію f інтегровною на A за σ-скінченною мірою μ, якщо f μ-інтегровна на кожному з A_k і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f| d\mu < \infty$.

Покладемо, за означенням, $\int\limits_{A} f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$.

Введемо позначення $a_n = 2^n \mu(A_n)$. Означимо на сім'ї Σ_A всіх вимірних підмножин множини A нову міру μ_1 формулою $\mu_1(B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B \cap A_n)}{a_n}$. При такому означенні трійка (A, Σ_A, μ_1) є простором зі скінченною мірою. Задамо на A функцію $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$.

Лема 1. Нехай $B \in \Sigma_A$ і $\mu(B) < \infty$. Тоді функція $h \colon B \to \mathbb{R}$ інтегровна на B за мірою μ тоді і тільки тоді, коли функція $h \cdot g$ інтегровна на B за мірою μ_1. При цьому $\int_B h d\mu = \int_B hg d\mu_1$.

Доведення. На Σ_{A_n} маємо $\mu_1 = \frac{1}{a_n}\mu$, а функція g на A_n дорівнює сталій a_n. Тому для $B \subset A_n$ твердження очевидне:

$$\int\limits_B h d\mu = \int\limits_B a_n h\, d\left(\frac{1}{a_n}\mu\right) = \int\limits_B hg d\mu_1.$$

Довільну ж множину B можна зобразити у вигляді
$$B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n),$$
де множини $B \cap A_n$ диз'юнктні і кожна з них міститься у своєму A_n. Оскільки на B за умовою не тільки μ_1, але й μ скінченна, ми можемо застосувати теорему про зліченну адитивність інтеграла як функції множини до інтеграла на B як за μ_1, так і за μ, і скласти твердження леми із вже доведених тверджень на підмножинах $B \cap A_n$. □

Лема 2. Функція f інтегровна на A за мірою μ тоді і тільки тоді, коли функція $f \cdot g$ інтегровна на A за мірою μ_1. При цьому $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A fg d\mu_1$.

Доведення. Потрібно застосувати лему 1 до кожної з множин A_k, скористатись означенням 1 і застосувати зліченну адитивність інтеграла за мірою μ_1. □

На підставі леми 2 лінійність інтеграла, можливість інтегрування нерівностей, вимірність інтегровної функції, критерій інтегровності вимірної функції, лема Фату, теорема Лебега про мажоровану збіжність, теореми Леві – всі ці властивості для інтеграла за мірою μ легко випливають з відповідних властивостей для інтеграла за мірою μ_1.

Наступна властивість інтеграла за σ-скінченною мірою означає, що інтеграл не залежить від вибору зображення множини A у вигляді $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (це запитання напевно виникло у читача після прочитання означення 1).

Теорема. Нехай A – множина σ-скінченної міри, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, де $B_n \in \Sigma$ і $\mu(B_n) < \infty$. Інтеграл $\int_A f d\mu$ існує тоді і тільки тоді, коли f інтегровна на кожній B_n і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f| d\mu < \infty$. При цьому

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu.$$

Доведення. Нехай μ_1 – скінченна міра з лем 1 і 2. Скориставшись лемою 2 і застосувавши теорему про інтеграл як функцію множини до скінченної міри μ_1, отримаємо, що функція f інтегровна на A за мірою μ тоді і тільки тоді, коли функція $f \cdot g$ інтегровна на кожній B_n за μ_1 і збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f| \, g d\mu_1$.

При цьому $\int\limits_{A} f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} fg d\mu_1$. Для завершення доведення потрібно застосувати лему 1 на множинах B_k, що можливо з огляду на скінченність міри μ на кожній з цих множин. $\square$