Теорія міри і інтеграла
Тема 6 "Інтеграл Лебега"
Лекція 22

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Теорема 1. Нехай послідовність функцій (f_n) рівномірно збігається на множині A до функції f. Тоді, якщо всі функції f_n інтегровні на A, то й f інтегровна на A, і

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Введемо позначення $a_n = \int\limits_A f_n d\mu$. Послідовність (a_n) фундаментальна:

$$|a_n - a_m| \leqslant \int\limits_A |f_n - f_m|\, d\mu \leqslant \sup_{t\in A} |f_n(t) - f_m(t)|\, \mu(A) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Позначимо границю послідовності (a_n) через a. Нехай ε – довільне додатне число.

З рівномірної збіжності послідовності (f_n) до f існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для будь-якого $n > N$ і будь-якого $t \in A$

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4\mu(A)}.$$

Зафіксуємо таке $n > N$, що $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4}$. Скориставшись інтегровністю функції f_n, побудуємо таке допустиме розбиття $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множини A, що при будь-якому виборі $T = \{t_k\}_1^{\infty}$ відмічених точок $|a_n - S_A(f_n, D, T)| < \varepsilon/2$.
З огляду на нерівність $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4\mu(A)}$ розбиття D допустиме і для функції f:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_k} \left[|f(t)|\,\mu(\Delta_k)\right] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_k} \left[|f_n(t)|\,\mu(\Delta_k)\right] + \frac{\varepsilon}{4} < \infty.$$

Далі, для будь-якого вибору $T = \{t_k\}_1^\infty$ відмічених точок

$$
\begin{aligned}
|a - S_A(f, D, T)| &= \left| a - \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k) \right| \\
&\leqslant |a - a_n| + \left| a_n - \sum_{k=1}^{\infty} f_n(t_k)\mu(\Delta_k) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_n(t_k) - f(t_k)\right)\mu(\Delta_k) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Тобто функція f інтегровна і $\int_A f d\mu = a = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$ $\square$

Теорема 2. Якщо для вимірної функції f існує інтегровна мажоранта, то й сама функція f інтегровна. Детальніше формулювання: нехай на множині A функція f вимірна, $|f| \leqslant g$ і функція g інтегровна. Тоді функція f також інтегровна.

Доведення. Спочатку розберемо частковий випадок, коли f – зліченнозначна функція, тобто функція f має вигляд $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{A_k}$, де (A_k) – послідовність попарно неперетинних вимірних множин. Нерівність $|f| \leqslant g$ означає, що $|a_k| \leqslant g(t)$ при $t \in A_k$. Отже, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A_k)$ збігається абсолютно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} g d\mu \leqslant \int\limits_{A} g d\mu < \infty,$$

а для простої функції це є умовою інтегровності.

Загальний випадок ми виведемо з двох вже відомих результатів: теореми про наближення вимірної функції простими і теореми про рівномірну границю. Отож нехай f вимірна, $|f| \leqslant g$ і g інтегровна. Побудуємо таку послідовність (f_n) простих функцій, що $\sup\limits_A |f_n(t) - f(t)| < 1/n$. Тоді $|f_n| \leqslant g + 1/n$, і за вже доведеним частковим випадком цієї теореми f_n інтегровні. Отже, ми змогли зобразити функцію f як границю рівномірно збіжної послідовності інтегровних функцій. Цим доведено інтегровність функції f. $\square$

Доведена умова інтегровності стає корисною в багатьох ситуаціях. Справа в тому, що вимірність зберігається при всіх звичайних операціях над функціями: додаванні, множенні, граничному переході і т. д. Тому перевірка вимірності функції зазвичай не є складною. Зайти ж інтегровну мажоранту простіше, ніж перевіряти інтегровність, виходячи з означення.

22.1. Нехай f – вимірна функція і $|f|$ інтегровний. Тоді f інтегровна.
22.2. Кожна обмежена вимірна функція інтегровна.
22.3. Добуток обмеженої вимірної функції на інтегровну знову інтегровний.
22.4. Опишіть ті простори з мірою, на яких кожна вимірна функція інтегровна.

Лема Фату. Нехай на множині $A \in \Sigma$ задано послідовність (f_n) інтегровних функцій; $f_n \geqslant 0$, послідовність (f_n) збігається майже скрізь до деякої вимірної функції f, й інтеграли функцій (f_n) обмежені в сукупності: $\int\limits_A f_n d\mu \leqslant C < \infty$. Тоді f інтегровна й

$$\int\limits_A f d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Скористаємось теоремою Єгорова (п. ??). Виділимо в A вимірну підмножину A_1 з $\mu(A \backslash A_1) \leqslant \frac{1}{2}$, на якій f_n рівномірно збігаються до f. Позначимо $A \backslash A_1$ через B_1. Знову скориставшись теоремою Єгорова, виділимо в B_1 вимірну підмножину A_2 з $\mu(B_1 \backslash A_2) \leqslant \frac{1}{4}$, на якій f_n також рівномірно збігається до f. Позначимо $B_1 \backslash A_2$ через B_2.

Продовживши цей процес, отримаємо послідовність (A_j) попарно неперетинних вимірних множин і спадну послідовність множин B_j, $A_{j+1} \subset B_j$, $B_{j+1} = B_j \backslash A_{j+1}$, $\mu\left(B_j\right) \leqslant \frac{1}{2^j}$, які мають ту властивість, що на кожному з A_j послідовність (f_n) рівномірно збігається до f.

За теоремою про рівномірну границю, на кожній з A_j функція f інтегровна. Далі, для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ виконана оцінка

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bigcup_{k=1}^{N} A_k} f_n d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{A} f_n d\mu,$$

отже, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A} f_n d\mu$. За теоремою про інтеграл як функцію множини, функція f інтегровна на $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ і $\int\limits_{D} f d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A} f_n d\mu$.

Залишається зазначити, що, за побудовою, доповнення в A до D має міру нуль:

$$\mu\left(A\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(B_n\right)=0.$$

Отже, f інтегровна на всій множині A і $\int\limits_A fd\mu\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_A f_nd\mu$. □

Зауваження. Умову невід'ємності функцій f_n у формулюванні леми Фату можна дещо послабити: досить вимагати, щоб усі f_n були більшими або дорівнювали деякій інтегровній функції g. Справді, в цьому випадку функції f_n-g невід'ємні, і до них можна застосувати лему Фату в початковому формулюванні. Тобто функція $f-g$ інтегровна (відтак, інтегровна і $f=g+(f-g)$) і $\int\limits_A(f-g)d\mu\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_A(f_n-g)d\mu$. Залишилось додати до обох частин останньої нерівності $\int_A gd\mu$, щоб одержати потрібну оцінку $\int\limits_A fd\mu\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_A f_nd\mu$. □

Теорема Лебега про мажоровану збіжність. Нехай на множині A задано послідовність (f_n) інтегровних функцій, збіжну майже скрізь до вимірної функції f. Нехай далі у послідовності (f_n) є інтегровна мажоранта g (тобто g інтегровна і $|f_n| \leqslant g$ при всіх n). Тоді гранична функція f інтегровна і

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Всі функції f_n обмежені знизу інтегровною функцією $-g$, й інтеграли функцій f_n обмежені в сукупності:

$$\int\limits_A f_n d\mu \leqslant \int\limits_A g d\mu < \infty.$$

Відповідно до Зауваження звідси випливає, що функція f інтегровна і

$$\int\limits_A f d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Застосувавши те саме міркування до функцій $-f_n$, отримаємо, що

$$\int\limits_A (-f)d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_A (-f_n)d\mu = -\varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu,$$

тобто

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu \leqslant \int\limits_A f d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

З останньої двобічної нерівності випливає, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$, і $\int\limits_A f d\mu$ дорівнює цій границі. $\square$

Теорема Леві про монотонні послідовності. Нехай $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots$ – неспадна послідовність інтегровних функцій на A, й інтеграли функцій f_n обмежені в сукупності деякою сталою $C < \infty$. Тоді послідовність (f_n) прямує майже скрізь до деякої інтегровної функції f, і

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Не встигли, буде на наступній лекції. □

Теорема Леві про ряди. Нехай на множині A задана послідовність (f_n) невід'ємних інтегровних функцій і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_A f_n d\mu < \infty$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f, і

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Достатньо зазначити, що послідовність частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ задовольняє умови теореми Леві про монотонні послідовності. $\square$

Вправи

22.5. В усіх вищенаведених теоремах побудуйте приклади на істотність накладених умов.

22.6. Спираючись на теорему Лебега, доведіть таку теорему про мажоровану збіжність для рядів. Нехай задано нескінченну матрицю $(a_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$, кожний стовпчик якої збігається до відповідного числа a_m: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,m} = a_m$. Нехай, далі, існує послідовність (b_m) додатних чисел, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m < \infty$, яка мажорує всі рядки матриці: $|a_{n,m}| \leqslant b_m$ при всіх $n, m \in \mathbb{N}$. Тоді ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ абсолютно збіжний і $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$.

22.7. Сформулюйте та доведіть аналог леми Фату для числових рядів.