

Применение к пространствам пост. секц. кривизны

Тн. (Рунан) Пусть M, N — р-н. мн. пост. секц. кривизны K ,
 $\dim M = \dim N = n$. Тогда M и N локально изометричны:

$\forall p \in M, q \in N \exists$ окр. $U \subset M, V \subset N$ и изометрия $\Phi: U \rightarrow V$.

Зет. В учебниках по классической дифф. геометрии (Погорелов, Борисенко) есть простое док-во этой Тн. для $n=2$, которое использует только $\exists$ -ние полугеодезических координат.

► Построим какую-то лн. изометрию $\varphi: T_p M \rightarrow T_q N$ (со значениями соотв. метрик).

Пусть U, V — норм. окр-ти p и q соотв., шаровые одинакового радиуса: $U = B_\epsilon^N(p), V = B_\epsilon^N(q)$.

По доб. норм. окр., $\exp_p : B_\varepsilon(0)_M = \exp_p^{-1}(U) \rightarrow U$ и $\exp_q : B_\varepsilon(0)_N = \exp_q^{-1}(V) \rightarrow V$ - диффеоморфизмы. При этом $\varphi : \exp_p^{-1}(U) \rightarrow \exp_q^{-1}(V)$ - л.и. $\text{Bi} \varphi$ (т.к. сохраняет длины векторов). Тогда $\Phi := \exp_q \circ \varphi \circ (\exp_p)^{-1} : U \rightarrow V$ - диффеоморфизм (тут $(\exp_p)^{-1}$ - обратное к окр. $\exp_p$ на $\exp_p^{-1}(U)$).

$\forall \gamma \in U \quad \forall u \in T_u M \quad \exists$ геодр. γ в U , согд. p и $u : \gamma = \gamma(\frac{t}{\varepsilon}) =$
 $= \exp_p(t_0 v)$, где $v = \gamma'(0)$, т.к. $\forall$ несотрагн. точки

p и u геодезической γ (γ нас отп. несотрагн. в силу соч. 4.) и $\forall \tilde{u} \in T_p M, u \in T_u M \quad \exists!$ поле Якоби вдоль γ , принимающее знач. $\tilde{u}$ и u в соотв. точках (в силу того, что л.и. отображ. из кр-ва полей Якоби вдоль γ в $T_p M \oplus T_u M$,

стабилизируе в соомб. γ $\frac{\{ \text{name} \exists u, x, \gamma, \tilde{\gamma} : \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0), \gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0), \gamma \neq \tilde{\gamma} \Rightarrow \gamma - \tilde{\gamma} \text{ good comp} \}}{\text{two mach. } \gamma \text{ and } \tilde{\gamma} \text{ mach. } \gamma - \tilde{\gamma} \text{ mach. } \gamma - \tilde{\gamma}}$

а размерности равны $\Rightarrow \text{eq.}$ $\gamma_{\text{pr.}}$ или lem. 1 в gen-ve T_n (кода),

$\exists Y_{0,w}$ вдоль γ : $Y_{0,w}(t_0) = u$ (и $Y_{0,w}(0) = 0$). При этом

в сущ Pr. 4 $Y_{0,w}(t) = d_{t,v} \exp_p(tw)$, нормаль $\forall t \in (-\frac{\varepsilon}{|v|}, \frac{\varepsilon}{|v|})$:

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=v} \Phi(Y_{0,w}(t)) = d_{t\varphi(v)} \exp_q \circ \varphi \circ d_{\exp_p(tv)} (\exp_p)^{-1} \circ d_{t\varphi(v)} \exp_p(tw) = d_{t\varphi(v)} \exp_q(t\varphi(w)) = \tilde{Y}_{0,\varphi(w)}(t) -$$

значение норм. кода вдоль $\Phi \circ \gamma : t \mapsto \exp_q(t\varphi(w))$.

(мы $d_{tv} \varphi = \varphi$, м.к. φ -линейное). В сущ Cor. 3,

$$Y_{0,w}(t) = \begin{cases} \sin(\sqrt{k}t) F, & k > 0 \\ t F, & k = 0 \\ \sinh(\sqrt{-k}t) F, & k < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{Y}_{0,\varphi(w)}(t) = \begin{cases} \sin(\sqrt{k}t) \tilde{F}, & k > 0 \\ t \tilde{F}, & k = 0 \\ \sinh(\sqrt{-k}t) \tilde{F}, & k < 0 \end{cases}$$

где F и $\tilde{F}$ - норм. кода вдоль γ и $F \circ \gamma$ соомб.,

предположение

$$\begin{cases} \frac{w}{\sqrt{k}}, & k > 0 \\ w, & k = 0 \\ \frac{w}{\sqrt{-k}}, & k < 0 \end{cases}$$

$$\text{и } \begin{cases} \frac{\phi(w)}{\sqrt{k}}, & k > 0 \\ \phi(w), & k = 0 \\ \frac{\phi(w)}{\sqrt{-k}}, & k < 0 \end{cases} \text{ соотв. т.к. } \phi - \text{изометрия,}$$

$|w| = |\phi(w)| \Rightarrow [\text{св-во парал. перен.}] \Rightarrow |E| = |\tilde{E}| \Rightarrow \forall t \in |Y_{0,w}(t)| =$
 $= |\tilde{Y}_{0,\phi(w)}(t)| = |d_{\gamma(t)} \phi(Y_{0,w}(t))|$, В ч-ти, при $t = t_0$ $|u| =$
 $= |d_u \phi(u)|$. Т.к. это верно $\forall u \in U$, $\phi: U \rightarrow V$ - изометрия. Δ
 $\text{Рез. В ч-ти, } \forall n\text{-мерное мн. пост. секц. крив. } k \text{ локально изометрично } M^n(k).$
Th. (Карман-Киллинг).

1. Если M - полное односвязное n -мерное риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , то M изометрично $M^n(k)$.
2. Если M - полное связное n -мерное риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , то M изометрично $M^n(k)/G$, где G - ~~непрерывная~~ вполне разрывно действующая

подгруппа группы изометрий $M^n(k) \rightarrow M^n(k)$, а $M^n(k)/G$ — пространство орбит по её действию,

Лем. "Вполне разрывно" означает, что $\forall p \in M^n(k) \exists \text{ окр. } U \ni p$.
 $\forall a \in G, a \neq e \quad a(U) \cap U = \emptyset$ (в ч-ти, отсюда следует, что действие свободно). Можно показать, что в этом случае $M^n(k)/G$ — гладкое многообразие, и на нём $\exists!$ рим. метрика такая, что канон. проекция $M^n(k) \rightarrow M^n(k)/G$ — лок. изометрия в окр-ти $\forall$ точки (т.е. это "риманово покрытие" как в Лем. по Тн. Майерса), в ч-ти, $M^n(k)/G$ может нести пост. связную крив. k . Например, при $k=0$ такие кр-ва орбит диффеоморфны $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

и связны, $\Rightarrow$ (идея). Если в условиях Th. Римана M и P полны,
то $\forall \gamma \in M \exists$ кратчайшая геод. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$:

$\gamma(0) = p, \gamma(a) = \gamma$ (но уже, вообще говоря, не единственная,
в отличие от случая $\gamma \in U$) по Th. X.-P. - K.-P.,
и в силу полноты она по-прежнему имеет вид $\gamma(t) =$

$= \exp_p(t \cdot v)$ (но при $k > 0$ может содержать сопряж. с p точки),

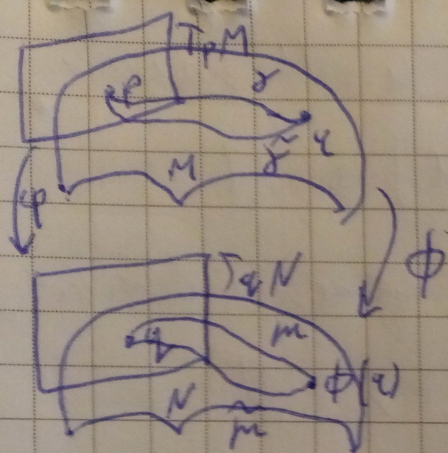
$\gamma = \exp_p(t_0 \cdot v)$. Как и в док-ве Th. Римана, положим $\phi(\gamma) :=$

$= \exp_q(t_0 \cdot \phi(v))$ для какого-то лин. изометричного $\phi: T_p M \rightarrow T_q N$

(оно совпадает с ϕ из Th. Римана на норм. окр-ти U т. p).

Тогда можно показать, что при относительн M :

— ϕ корректно определено (не зависит от выбора γ), не



если для ^{любого} геог. $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow M$ $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$

и $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a) = q$, и $\mu := \exp_q \circ \Phi \circ (\exp_p)^{-1} \circ \gamma$,

$\tilde{\mu} := \exp_q \circ \Phi \circ (\exp_p)^{-1} \circ \tilde{\gamma}$, то $\mu(a) = \tilde{\mu}(a)$.

— Φ — накрытие и лок. диффео-зм в окр-ти $\forall$ точки.

— $\forall \gamma \in M$ $d_\gamma \Phi$ — изометрия.

(Это верно и не для пост. сев. кривизны при соблюдении доп. ограничений на Φ ; соотв. результат из теоремы Кармана-Амброуза-Хакса, см., например, J. Cheeger, D. Ebin, Comparison theorems in Riemannian geometry).

В нашем случае $M = M^n(k)$ и $N = M$ из условия

(запомним, что при $k \leq 0$ соотв. св-ва Φ доказываются

ан-но гом-ву π_1 Кармана - Адамара ниссе⁵ и π_1 Римана была

Тогда при односвязном M ϕ -накрытие $\Rightarrow \phi$ -гомео-зм
 $\Rightarrow [\phi\text{-лок. диффео-зм}] \Rightarrow \phi\text{-диффео-зм} \Rightarrow [d_\phi\phi\text{-изом. } \forall \epsilon] \Rightarrow$
 ϕ -изометрия.

В общем все случаи строится изоморфизм между групп. группой
 M ($\phi: M^n(K) \rightarrow M$ -унив. накр. $\Rightarrow M \cong M^n(K)/\pi_1(M)$) и подгруппой
группы изометрий G . 

Тн. (Мостова о жесткости). Пусть M и N - полные связные n -мерные
($n \geq 3$) мн. пост. секц. крив. $k < 0$, ^(неотличим, компактные) конечного объема. Тогда M изомет-
рично $N \Leftrightarrow \pi_1(M)$ и $\pi_1(N)$ изоморфны, и $\forall$ изоморфизм $\pi_1(M) \rightarrow$
 $\pi_1(N)$ индуцируется какой-то изометрией $M \rightarrow N$.  См. ссылку в Б-3. 
Рем. При $k \geq 0$ это, вообще говоря, не так. Рем. См. также Дик. Вальтер π_1 -ва пост. кривизны.

Применение к случаю неположительной кривизны

Лем. Если $\forall p \in M \forall$ м-ти $\sigma \subset T_p M \quad K_p(\sigma) \leq 0$, то $\forall$ геодр.

M не содержит сопряженных точек.

Зам. В дальнейшем в таких случаях будем говорить, что M - неположительной (седанной) кривизны и писать $K \leq 0$.
(а аналогично для строго отриц. кривизны и $K < 0$).

► Пусть γ - геодр. M , Y - поле Якоби вдоль γ , $f := |Y|^2$. Тогда

$$f'' = (2g(Y, \nabla_{\dot{\gamma}} Y))' = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}} Y, \nabla_{\dot{\gamma}} Y) + 2g(Y, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y) =$$
$$= [\text{упр-е (*) для полей Я.}] = 2|\nabla_{\dot{\gamma}} Y|^2 - 2g(R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y) \geq 0$$

(т.к. $\forall t$ из обл. отр. γ второй член в t - это

$$- 2 K_{\dot{\gamma}(t)}(\sigma) \cdot (g_{\dot{\gamma}(t)}(Y(t), Y(t)) g_{\dot{\gamma}(t)}(\dot{\gamma}'(t), \dot{\gamma}'(t)) - g_{\dot{\gamma}(t)}(Y(t), \dot{\gamma}'(t))^2),$$

где $\sigma = \text{span} \{Y(t), \dot{\gamma}'(t)\}$).

Тл.к. $f \geq 0$ и $f'' \geq 0$, если $\exists t_0 \neq t_1 : Y(t_0) = Y(t_1) = 0$,
то $f = 0 \Rightarrow Y = 0$. $\triangle$

Def. Риманово мн. M неизм. пространством Адамара, если оно непараметризованной секц. кривизны, полно и односвязно.

Тл. (Картан-Адамар) Если M - n -мерное мн-во Адамара, то M диффеоморфно $\mathbb{R}^n$, причём в качестве диффеоморфизма можно взять $\exp_p : T_p M \rightarrow M \quad \forall p \in M$. Кроме того, $\forall$ геодезическая $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ - единственная кратчайшая, соединяющая $\gamma(0)$ и $\gamma(a)$.

$\triangleright$ В силу полноты и связности по Тл. К.-Д.-К.-Д.
 $\forall p \in M \quad \exp_p : T_p M \rightarrow M$ определено на всём $T_p M$ и

знач. $(\forall q \in M \exists$ крив. гео. $\gamma: [0, a] \rightarrow M : \gamma(0) = p, \gamma(a) = q,$
тогда $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, где $v = \gamma'(0)$, и в ч-ти $q = \exp_p(av)$.

В силу лем. и Р. 5, выше $\forall v \in T_p M$ д. $\exp_p$
невырождено (т.к. $\nexists$ сопр. точек $\forall$ геодезической). Т.е. $\exp_p$
лок. диффео-зм $\forall v \in T_p M$. Чтобы показать, что это
диффео-зм, тогда достаточно показать, что это гомео-
морфизм. В свою очередь, в силу связности $T_p M$
и M , для этого достаточно показать, что $\exp_p$ - накрытие.

Всегда на $T_p M$ рим. м-ку $k := \exp_p^* g$ (где g - м-ка
 M) (эта форма - рим. м-ка, т.к. $\exp_p$ - лок. диффео-
зм в $\forall$ точке, ~~т.е. $\exp_p$ - погруж.~~ ^{т.е. $\exp_p$ - погруж.} ~~а k - это~~ ^{а k - это} ~~форм. g - рим. м-ка~~ ^{I функ. форма}). В

этой метрике $\forall v \in T_p M$ прямая $t \mapsto tv$ - полная
 $(\mathbb{R} \rightarrow T_p M)$ геодезическая, проходящая через $0 \in T_p M$, т.к.
 это преобраз геодезической $t \mapsto \exp_p(tv)$ пог действует
 $\exp_p$, как изометризм в окр-ти $\forall$ точки. Поэтому
 $T_p M$ геодез. полно в $0 \Rightarrow$ полно по Тн. Х.-Ф.-К.-Ф.

Далее все шары и сферы - отн. внутренние к-к, соотв. римановы.
 Пусть $q \in M$. В силу лем. диффеоморфности, $\forall v \in \exp_p^{-1}(q)$
 $\exists \delta > 0 : \exp_p : B_\delta(v) \rightarrow \exp_p(B_\delta(v))$ - диффео-зм, в ч-ти,
 $\exp_p^{-1}(q) \cap B_\delta(v) = \{v\}$, поэтому $\exp_p^{-1}(q)$ - дискретное. В ч-ти,
 т.к. $T_p M$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, оно $\leq$ счётное (в каждой $B_\delta(v) \exists$
 точка с рац. координатами), обозначим $\exp_p^{-1}(q) = \{v_m\}_{m=1}^{\infty}$

$\{\gamma_m\}_{m=1}^L$. $\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(q)$ - шаровая окр-ть q .

Покажем, что $\forall m$ $\exp_p: B_\varepsilon(\gamma_m) \rightarrow B_\varepsilon(q)$ - диффеоморфизм (в n -ти, линейноморфизм). Слова-таки, в силу его лок. диффеоморфности в $\forall$ точке, достаточно показать, что это $\forall \gamma$.

$\forall w \in B_\varepsilon(\gamma_m)$ в силу полноты $T_p M \exists$ кратчайшая нпт. параметризованная геодезическая $\gamma: [0, a] \rightarrow T_p M$: $\gamma(0) = \gamma_m$, $\gamma(a) = w$, причём $a = l(\gamma) = d(\gamma_m, w) < \varepsilon$, и $\forall t \in [0, a]$ $d(\gamma_m, \gamma(t)) = l(\gamma|_{[0, t]}) = t \leq a < \varepsilon$, поэтому $\gamma([0, a]) \subset B_\varepsilon(\gamma_m)$.

Положим $\mu := \exp_p \circ \gamma$. П.к. $\exp_p$ - лок. изометрия в окр-ти $\forall$ точки, это тоже нпт. параметризованная геодезическая, и $\forall t \in [0, a]$ $d(q, \mu(t)) \leq [m.k. \mu|_{[0, t]})$

соединяет $\mu(0) = \exp_p(\gamma(0)) = \exp_p(v_m) = q$ и $\mu(t) \leq \ell(\mu|_{[0,t]}) =$
 $= t \leq a < \varepsilon \Rightarrow \mu([0, a]) \subset B_\varepsilon(q) \Rightarrow \exp_p(w) = \mu(a) \in B_\varepsilon(q)$
 (кроме того, μ - кривая по св-ву норм. окр-ти). Итак, $\exp_p(B_\varepsilon(v_m)) \subset B_\varepsilon(q)$.
 $\nexists \exp_p(B_\varepsilon(v_m)) \neq B_\varepsilon(q)$. Тогда $\exists w \in S_\varepsilon(v_m) = \partial B_\varepsilon(v_m)$:
 $\exp_p(w) \in B_\varepsilon(q)$ (почему?). Слова построили крайнюю по нам.
 напр. геодез. $\gamma: [0, \varepsilon] \rightarrow T_p M: \gamma(0) = v_m, \gamma(\varepsilon) = w$. Тогда
 для $\mu := \exp_p \circ \gamma$ $\mu([0, \varepsilon]) \subset B_\varepsilon(q)$ (т.к. $\forall t < \varepsilon$ $\mu(t) \in$
 $\in \exp_p(B_\varepsilon(v_m)) \subset B_\varepsilon(q)$ и $\mu(\varepsilon) = \exp_p(w) \in B_\varepsilon(q)$ по предполож.),
 и слова это нам. напр. геодез. $\Rightarrow$ крайняя по св-ву
 норм. окр-ти $\Rightarrow d(q, \exp_p(w)) = \ell(\mu) = \varepsilon$, т.е.
 $\exp_p(w) \notin B_\varepsilon(q) \nexists$. Итак, $\exp_p(B_\varepsilon(v_m)) = B_\varepsilon(q)$.

Проверим инъективность: пусть $\exp_p(w_1) = \exp_p(w_2) = q$,
 $w_1, w_2 \in B_\varepsilon(v_m)$. Слова построены кратчайш. геог. γ_1, γ_2 в $B_\varepsilon(v_m)$,
 соединяющие v_m с w_1 и w_2 соотв. Тогда $\mu_1 := \exp_p \circ \gamma_1$ и $\mu_2 := \exp_p \circ \gamma_2$ —
 геог. в $B_\varepsilon(q)$, соединяющие q и q . По св-ву норм. окр-ти,
 тогда после перепараметризации $\mu_1 = \mu_2$, т.к. это единств.
 кратчайшая. Но тогда после этой же перепарам. $\gamma_1 = \gamma_2$,
 т.к. для $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow B_\varepsilon(v_m)$ $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = v_m$ и
 $d_{v_m} \exp_p(\gamma_1'(0)) = \mu_1'(0) = \mu_2'(0) = d_{v_m} \exp_p(\gamma_2'(0)) \Rightarrow \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$
 в силу невырожденности $d_{v_m} \exp_p$. В ч-ти, $w_1 = \gamma_1(a) =$
 $= \gamma_2(a) = w_2$. тут все ясно в. в 0 — в +0,
 Итак, $\exp_p : B_\varepsilon(v_m) \rightarrow B_\varepsilon(q)$ — бигеом.-зм.

Из $\exp_p(B_\varepsilon(v_m)) = B_\varepsilon(q)$ $\forall m$ следует, что $\bigcup_m B_\varepsilon(v_m) \subset \exp_p^{-1}(B_\varepsilon(q))$. Пусть теперь $w \in \exp_p^{-1}(B_\varepsilon(q))$, т.е.

$\eta := \exp_p(w) \in B_\varepsilon(q)$. Построим кан. параметризацию $\mu: [0, a] \rightarrow B_\varepsilon(q)$, соединяющую q и η (крайне, в силу лемм.)

и используя из w геодезическую $T_p M: \gamma: \mathbb{R} \rightarrow T_p M$:
 $\gamma(a) = w$ и $\gamma'(a) = (d_w \exp_p)^{-1}(\mu'(a-0))$. Тогда в силу лем. изометричности $\exp_p$ $\exp_p \circ \gamma$ - геог. в M , $(\exp_p \circ \gamma)(a) = \exp_p(w) = \eta = \mu(a)$, и $(\exp_p \circ \gamma)'(a) = \mu'(a-0)$, в силу единств.,

$\mu = \exp_p \circ \gamma|_{[0, a]}$, в ч-ти, $q = \mu(0) = \exp_p(\gamma(0))$, т.е.

$\gamma(0) \in \exp_p^{-1}(q) \Rightarrow \exists m: \gamma(0) = v_m$, т.к. $d(v_m, w) \leq \ell(\gamma|_{[0, a]}) = a = \ell(\mu) = d(q, \eta) < \varepsilon$, $w \in B_\varepsilon(v_m)$. Итак, $\exp_p^{-1}(B_\varepsilon(q)) = \bigcup_m B_\varepsilon(v_m)$.

Наконец, проверим, что это объедин. физически.

↗ $\exists m_1 \neq m_2 : \exists w \in B_\varepsilon(v_{m_1}) \cap B_\varepsilon(v_{m_2})$ Как и ранее, строим кратчайшие геодр. γ_1, γ_2 , соединяющие v_{m_1}, v_{m_2} с w соответственно, тогда для $\mu_i := \exp_p \circ \gamma_i, i=1,2$ μ_1 и μ_2 - геодр. в $B_\varepsilon(q)$, соединяющие q и $\exp_p(w) \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$ после перенарам. В силу нормальности $B_\varepsilon(q) \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ по единств. геодр. (как в фак-ве $i \wedge j$ выше) $\Rightarrow v_{m_1} = v_{m_2} \nabla$. Итак, $\exp_p$ -накр. $\Rightarrow$ диффео-зм.

Последнее утв. следует из того, что в усл. Тн $\forall p, q \in M$ q содержится в окр-ти p (если угодно, всё M -норм. окр-ть) Δ
Ес. $M^n(K), K \leq 0$, изобр. параболического и ^{норм.} основ. линейчатые в E^3 (в ч-ти, геликоид) - тр-ва Адамара (а вот цилиндр - нет).
Тн. (Трессман) $\perp$. Если γ мин. лн. $M, K \leq 0, M$ компактно и связно, то $\pi_1(M)$ не содержит эл-тов конечного порядка. $\perp$ Если в тех же усл. $K < 0$, то $\forall$ нетрив. абелева подгр. $\pi_1(M)$ изоморфна $\mathbb{Z} \Rightarrow$ Б-З. Δ

Случай отрицательной кривизны

Снова будем обозначать через $K \geq K_0$ условие $K_p(\sigma) \geq K_0(p)$
 $\forall p \in M, \forall \text{м.-стн } \sigma \in \text{Tr} M$, где K_0 ^{м.} - ф-ция на M , и ан-но для
неравенств в другую сторону и строгих.

Th. (Синг). Пусть M - n -мерное ориентируемое компактное связное
риманово мн. с $K > 0$. Тогда оно односвязно.

► См. Бурнаго - Залкавер ▲

Рем. Можно показать, что у ориентируемого ^{связного} мн. M $\exists$ двумер-
ное ориент. ^{связное} покрытие. Тогда в усл. Th. Синга оно универ-
сальное, поэтому $\pi_1(M)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

Th. (о сфере, Бернсе - Клингенберг (1960, гомеоморфность) - Брендле (2004)).

Если M - полное связное рим. мн. размерности n , и $\frac{1}{4}K_0 < K \leq K_0$ для ф-ции $K_0 > 0$, то M диффеоморфно S^n .

Тн. (о дуге, Чжен-Троман)

Если M - полное ~~связное~~ рим. мн. с $K \geq 0$, то у него $\exists$ компактное внешне геодезическое подмногообразие S (дуга) такое, что M диффеоморфно $N S$ (норм. расслоению S).

см. Бунато-Залгангер. Δ

Тн. (Пепельман) (бывшая "гипотеза о дуге")

Если M - полное ^{н-мерное} связное некомпактное рим. мн. с $K \geq 0$ и $\exists p \in M: K_p(\sigma) > 0 \forall \sigma \in T_p M$, то $S = \{p\} \Rightarrow M$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Рез. Также см.: М. Трапез, Знак и геометрический смысл кривизны и Бунато-Бунато-Иванов (обобщения на метр. пр-ва).

Уравнения Тейсса и Кодайши для гиперповерхности

Пусть (M, γ) — $(\infty - m)$ -мерная гиперповерхность в римановом $(n+1)$ -мерном $(\bar{M}, \bar{g})$, $\gamma = \gamma^* \bar{g} - I$ функ. форма (M, γ) , ∇, R и $\bar{\nabla}, \bar{R}$ — рим. св-во и тензор кр. γ и $\bar{g}$ соотв., ξ — ед. норм. поле (M, γ) (локальное или глоб.) и α — соотв. ему скалярная II функ. форма.

Зам. Случай произвольной размерности см. например, в Кодайши-Кенигзу.

Лем. 1. (Уравнение Тейсса)

$$\bar{g}(\bar{R}(\gamma_*(X), \gamma_*(Y))\gamma_*(Z), \gamma_*(W)) = g(R(X, Y)Z, W) -$$

$$- (b(x, w) b(y, z) - b(x, z) b(y, w)). \leftarrow (\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}(M))$$

2. (Уравнение Котански)

$$\nabla (\bar{R}(\gamma_*(X), \gamma_*(Y)) \gamma_*(Z), \xi) = (\nabla_X b)(Y, Z) - (\nabla_Y b)(X, Z).$$

► Чтобы найти $\bar{R}(\gamma_*(X), \gamma_*(Y)) \gamma_*(Z)$ для $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $\forall p \in M$ продолжим $\gamma_*(X)$, $\gamma_*(Y)$ и $\gamma_*(Z)$ на окр. $U \ni \gamma(p)$ в $\bar{M}$ полями $\bar{X}$, $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$ соотв. (т.е. $\bar{X} \circ \gamma = \gamma_*(X)$ и т.д.), найдем $\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) \bar{Z}$ и подсчитаем его в точке $\gamma(p)$, в силу линейности $\bar{R}_{\gamma(p)}$ по 3 аргументам $\forall p \in M$, получим требуемое:

$$\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) \bar{Z} = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} - \bar{\nabla} [\bar{X}, \bar{Y}] \bar{Z},$$

при этом в точке $\gamma(p)$ $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z} = \nabla_X \nabla_Y Z$,

т.к. $\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z}$ прообразом $\bar{\nabla}_Y Z = \varphi_* (\nabla_Y Z) + \theta(Y, Z) \xi$ на U (по аналогии с определением $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$). Используя лемму

Тейлора выше, ещё раз лемму Тейлора для производной от первого слагаемого и Бейнхардта - для второго, получим:

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z = \varphi_* (\nabla_X \nabla_Y Z) + \theta(X, \nabla_Y Z) \xi + X(\theta(Y, Z)) \xi - \theta(Y, Z) \varphi_* (A_X Y)$$

и аналогично

$$\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z = \varphi_* (\nabla_Y \nabla_X Z) + \theta(Y, \nabla_X Z) \xi + Y(\theta(X, Z)) \xi - \theta(X, Z) \varphi_* (A_Y X)$$

и из леммы Тейлора

$$\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = \varphi_* (\nabla_{[X, Y]} Z) + \theta([X, Y], Z) \xi,$$

где $\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Z} \circ \varphi$, т.к. $[\bar{X}, \bar{Y}]$ прообразом $\varphi_* ([X, Y])$. Из полученных выражений а лев. R следует,

что как. составленная равна

$$\bar{R}(\gamma_*(X), \gamma_*(Y))\gamma_*(Z)^T = \gamma_*(R(X, Y), Z) - b(Y, Z)\gamma_*(A_3 X) + \\ + b(X, Z)\gamma_*(A_3 Y).$$

Доказывая на $\gamma_*(W)$, справа получим:

$$\bar{g}(\gamma_*(R(X, Y)Z), \gamma_*(W)) - b(Y, Z)\bar{g}(\gamma_*(A_3 X), \gamma_*(W)) + \\ + b(X, Z)\bar{g}(\gamma_*(A_3 Y), \gamma_*(W)) = [\text{доб. } g] = g(R(X, Y)Z, W) - b(Y, Z) \\ g(A_3 X, W) + b(X, Z)g(A_3 Y, W) = [\text{свойств } A \text{ и } b] = g(R(X, Y)Z, W) - \\ - b(Y, Z)b(X, W) + b(X, Z)b(Y, W).$$

Чтобы получить попр. составленную, заменим на ξ :

$$\bar{g}(\bar{R}(\gamma_*(X), \gamma_*(Y)), \gamma_*(Z), \xi) = b(X, \nabla_Y Z) + X(b(Y, Z)) - b(Y, \nabla_X Z) - \\ - Y(b(X, Z)) - b([X, Y], Z) = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = (X(b(Y, Z)) -$$

$$\begin{aligned}
 & -b(\nabla_x Y, Z) - b(\nabla_Y X, Z) - (Y(b(X, Z)) - b(\nabla_Y X, Z) - b(X, \nabla_Y Z)) = \\
 & = (\nabla_X b)(Y, Z) - (\nabla_Y b)(X, Z). \triangle
 \end{aligned}$$

Рем. локально (для коорг. $(u^1, \dots, u^n)$ на M и $(x^1, \dots, x^{n+1})$ на $\bar{M}$, отождествляя как выше) все можно записать для $X = \frac{\partial}{\partial u^k}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^l}$, $Z = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $W = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $i, j, k, l = \overline{1, n}$ для гр-л Тейлора:

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{abcd} \eta_i^a \eta_j^b \eta_k^c \eta_l^d &= R_{ijke} - (b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{jk}) \\
 (\text{мы имеем } \eta_X(X) &= \eta_X\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \eta_k^c \frac{\partial}{\partial x^c} \text{ и т.д.}), \text{ и для } X = \frac{\partial}{\partial u^j}, Y = \frac{\partial}{\partial u^k}, Z = \frac{\partial}{\partial u^i}
 \end{aligned}$$

в гр-ле Котаньи:

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{abcd} \xi_i^a \eta_j^b \eta_k^c \eta_l^d &= b_{ik, j} - b_{ij, k} \\
 \text{где } b_{ij, k} &= \left(\nabla \frac{\partial}{\partial x^k} b \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^l b_{lj} - \Gamma_{kj}^l b_{li} \\
 (\text{в } \eta\text{-м, } \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} &\text{ для плоской } \sigma\text{-м}).
 \end{aligned}$$

Рем. Из этих ур-й для полей выводятся соотв. равенства
 $\forall p \in M$.

Соч. 1. Если (M, γ) - интерпрет. в мн. пост. сема. упр. k , то
 $\forall x, y, z, w$:

$$k(g(x, w)g(y, z) - g(x, z)g(y, w)) = g(R(x, y)z, w) - (b(x, \overset{w}{\bullet})b(y, z) - b(x, z)b(y, w)),$$

$$(\nabla_x b)(y, z) = (\nabla_y b)(x, \overset{z}{\bullet}).$$

► В этом случае $\bar{R}(\gamma_*(x), \gamma_*(y))\gamma_*(z) = k(\bar{g}(\gamma_*(y), \gamma_*(z))\gamma_*(x) - \bar{g}(\gamma_*(x), \gamma_*(z))\gamma_*(y)) = k\gamma_*(g(y, z)x - g(x, z)y)$, и домножая на $\gamma_*(w)$ и используя ещё раз лев. g , получаем левую часть первого равенства, а домножая на z - 0. 

Сол. 2. $\forall p \in M$ и м-ств $G \subset T_p M$, если K и $\bar{K}$ - севы. кривизны M и $\bar{M}$ совб., то

$$\bar{K}_{\psi(p)}(d\psi(G)) = K_p(G) - \frac{b_p(v,v)b_p(w,w) - b_p(v,w)^2}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2}$$

$\forall$ базиса $\{v, w\}$ в G .

$\Rightarrow$ Запишем упр-е Тейлора в p , подставив вместо x, y, z, w , v, w, w, v совб.:

$$\bar{g}_{\psi(p)}(\bar{R}_{\psi(p)}(d\psi(v), d\psi(w))d\psi(w), d\psi(v)) = g_p(R_p(v, w)w, v) - (b_p(v, v)b_p(w, w) - b_p(v, w)^2).$$

Подстав на норм. координаты $g_p(v, v)g_p(w, w) - g_p(v, w)^2 =$
 $= [\text{det } g] = \bar{g}_{\psi(p)}(d\psi(v), d\psi(v)) \bar{g}_{\psi(p)}(d\psi(w), d\psi(w)) -$
 $- \bar{g}_{\psi(p)}(d\psi(v), d\psi(w))^2$, получим совб. севы. кривизны. $\triangle$

def. Величина $(K_{ext})_p(\mathcal{B}) = \frac{g_p(v,v) g_p(w,w) - g_p(v,w)^2}{g_p(v,v) g_p(w,w) - g_p(v,w)^2}$

наз. внешней кривизной (M, γ) в p в адр. $\mathcal{B}$.

Rem. Из ур-я выше следует, что она не зависит от v, w .
 $K_p(\mathcal{B})$ в этом контексте ещё называют внутренней кривизной (M, γ) , $(K_{int})_p(\mathcal{B})$. В ч-ти, если $\bar{M}$ - мет. сев., крив. k , то $K_{int} - K_{ext} = k$ и $K_{int} = K_{ext}$ при $k=0$:

Соч. 3. (теорема единственности Гаусса) В E^{n+1} внешняя кривизна гиперповерхности однозначно определяется её I ф-ной ф-цией u , в ч-ти, сохраняется при изометриях (изгибаниях).

Rem. Конечно же, у Гаусса было $n=2$. В этом случае ф-ция K_{ext} (ф-ция, т.к. в $\forall$ точке m -ств $\mathcal{B}$ можно

огна: $\sigma = \text{Tr} M$) локально равна $\frac{v_{11}v_{22} - v_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ (положительная

$v = \frac{\partial}{\partial u^1}, w = \frac{\partial}{\partial u^2}$), т.е. кривизна Гаусса поверхности $k_1 k_2 = K$.

Ex. Используя ур-е Гаусса, найдём секр. кривизны

интерсферы S_R^n в E^{n+1} : как мы знаем, $b = \pm \frac{1}{R} g$ (в

зависимости от выбора $\bullet$ $\{ \}$), поэтому $\forall \sigma = \text{span} \{v, w\} \subset \text{Tr} M(v)$:

$$K_p(\sigma) = \frac{b_p(v, v) b_p(w, w) - b_p(v, w)^2}{g_p(v, v) g_p(w, w) - g_p(v, w)^2} = \frac{1}{R^2}, \text{ т.е. } S_R^n - \text{пост.}$$

секр. кривизны $\frac{1}{R^2}$.

def. Гиперповерхность в $(\bar{M}, \bar{g})$ наз. ^{вполне} однолинейной, если все её точки однолинейные.

Pr. $\forall$ связной вполне эмб. гиперпов. (M, ϵ) в E^{n+1}

$\chi(M)$ - либо область гиперплоскости, либо область интерсферы.

$\Rightarrow$ Точка $p \in M$ - омп. $\Leftrightarrow v_p = k(p) g_p$, где $k(p) =$
 $= k_1(p) = \dots = k_n(p)$ (н. кривизны), т.е. $k(p) = H(p)$ (ис
 среднее арифм.) Итак $v = H g$, H - ф-ция ср. кривизны,
 отвечающая выбранному ед. норм. полю ξ , Y_i - е. Кодацци:

$$(\nabla_X v)(Y, Z) = (\nabla_Y v)(X, Z),$$

где $(\nabla_X v)(Y, Z) = X(H g(Y, Z)) - H g(\nabla_X Y, Z) - H g(Y, \nabla_X Z) =$
 $= X(H) g(Y, Z) + H (X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z))$, и
 второе сч. равно 0 в силу соотв. св-ти с метрикой, т.е.

$$X(H) g(Y, Z) = Y(H) g(X, Z)$$

$\forall X$ выбирая (по крайней мере, локально) $0 \neq Y = Z \perp X$
 (в $\forall$ точке области определения), получаем $X(H) = 0$ (т.е.,

конечно все $n \geq 2$). Т.е. в силу св-ства M постоянна.
 Т.к. $\zeta = Hg$, оператор Вейля, $(A_\xi)_p = H \text{Id}_{T_p M} \forall p \in M$,
 поэтому разл. Вейлгармена принимает вид $\bar{\nabla}_X \zeta = -H \chi(X)$,
 для лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ в окр-ти $p \in M$ и $X = \frac{\partial}{\partial u^i}$ это
 означает $\zeta_i = -H \chi_i$, $i = \overline{1, n}$. Т.е. (в силу св-ства M),
 - если $H = 0$, то поле ζ - постоянно и из $\langle \chi_i, \zeta \rangle = 0$
 $\forall i$ следует $\langle \chi, \zeta \rangle = C \in \mathbb{R}$ - гр-е гиперплоскости,
 содержащей $\chi(M)$.

- если $H \neq 0$, то в силу св-ства M $\chi + \frac{\zeta}{H}$ постоянно
 (как отображ. $M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$) и равно $\chi_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, тогда $|\chi - \chi_0| =$
 $= \left| \frac{-\zeta}{H} \right| = \frac{1}{|H|}$ - гр-е гиперсферы, содержащей $\chi(M)$. $\triangle$

Th (Бонне, основная теорема теории гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны).

1. Пусть M - гладкое односвязное (следовательно, ориентированное) n -мерное многообразие, g - риманова метрика на M , ω - симп. 2-форма на M , и они удовл. ур-ям Тагесса и Кодацини для случая гиперповерхности в мн. пост. секц. крив. k (как в Сеч. 1.). Тогда $\exists$ погружение $\psi: M \rightarrow M^{n+1}(k)$ такое, что g и ω - его I и II фундамент. формы соотв.

2. Пусть (M, ψ) и $(\tilde{M}, \tilde{\psi})$ - гиперповерхности в $M^{n+1}(k)$ для какого-то связного M , и в ~~каждой~~ каждой точке M их первые и вторые (с точностью до знака)

уравн. формы совпадают. Тогда $\exists$ изометрия $F: M^{n+1}(k) \rightarrow M^{n+1}(k)$: $F \circ \rho = \gamma$.

Рем. Очевидно, в 2. верно и обратное: из $\exists$ -ия F следует равенство форм. Ал-ные утверждения верны и для подмногообразий произвольной размерности в $M^{n+q}(k)$, но там добавляются ещё ур-я Рунга. Доказательство для $n=2$ и $k=0$ можно найти в Топогелове.