Варіант 1

1. Нехай просторова крива параметризована натуральним параметром, $\rho = 1/k$, $\sigma = 1/\kappa$ – величини, обернені до її кривини і скруту відповідно, $\rho' \neq 0$, і $a^2 = \rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ постійна ($a > 0$). Довести, що тоді крива лежить на сфері радіуса a.

2. Довести, що якщо на n-вимірному гладкому многовиді існує зовнішня n-форма, яка в жодній точці не дорівнює нулю, то він орієнтовний.

Варіант 2

1. Інверсією площини відносно кола радіуса r з центром у початку координат 0 називається відображення $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ на себе, що переводить кожну точку x у $\frac{r^2 x}{|x|^2}$. Показати, що при інверсії площини стичне коло кривої, що не проходить через центр інверсії 0, переходить у стичне коло образу кривої.

2. Довести, що якщо на гладкому многовиді M існує зовнішня 2-форма, невироджена в кожній точці, або майже комплексна структура, тобто $(1,1)$-тензорне поле J операторів $J_p \colon T_pM \to T_pM$ таке, що $(J_p)^2 = -id$ для будь-якої точки $p \in M$, то вимірність M парна.

Варіант 3

1. Стичною сферою у деякій точці просторової кривої γ з ненульовим скрутом зветься сфера, у якої з кривою у цій точці дотик третього порядку. Довести що перетином стичної сфери і стичної площини у тій же точці є коло з центром у точці $\gamma + \frac{1}{k}\nu$ (стичне коло). Показати, що для кривої постійної кривини це буде велике коло цієї сфери.

2. Навести приклад трьох гладких векторних полів X_1, X_2, X_3 на сфері S^3 таких, що їх значення утворюють базис дотичного простору у кожній точці сфери. Знайти розкладення $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ для будь-яких i та j від 1 до 3.

Варіант 4

1. Довести, що для просторової кривої γ існує така крива γ^*, що головні нормалі γ є бінормалями γ^* у відповідних точках тоді і тільки тоді, коли кривина і скрут γ задовольняють співвідношення $k = \lambda(k^2 + \kappa^2)$ для деякого постійного λ.

2. Довести, що будь-яка голоморфна функція $f \colon U \to f(U)$ є конформною еквівалентністю відкритої $U \subset \mathbb{C}$ на її образ $f(U) \subset \mathbb{C}$ (тобто вважаємо, що f не переводить точки U у нескінченність) відносно стандартної евклідової метрики на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Варіант 5

1. Довести, що в деякому околі точки, у якій скрут просторової кривої не дорівнює нулю, крива перетинає свою стичну площину, розташовуючися по обидва її боки, але залишається з одного боку від спрямної площини.

2. Довести, що група $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ матриць визначника 1 є гладким вкладеним підмноговидом у просторі всіх дійсних $(n \times n)$-матриць, встановити вимірність цього многовида і описати його (матричний) дотичний простір у одиничній матриці.

Варіант 6

1. Довести, що просторова крива з ненульовим скрутом κ і натуральним параметром s лежить на сфері тоді і тільки тоді, коли її радіус кривини $R = 1/k$ задовольняє рівнянню $R''_\sigma + R = 0$, де $\sigma = \int\limits_0^s \kappa ds$ (тобто $R = C\cos\sigma + K\sin\sigma$ для деяких констант C і K).

2. Довести, що якщо на $2n$-вимірному гладкому многовиді M існує зовнішня 2-форма, невироджена в кожній точці, то M орієнтовний.

Варіант 7

1. Стичною сферою у деякій точці просторової кривої з ненульовим скрутом зветься сфера, у якої з кривою у цій точці дотик третього порядку. Довести, що якщо γ_2 – лінія центрів стичних сфер (аналог еволюти) кривої γ_1 і γ_1 – лінія центрів стичних сфер γ_2 (тобто між їхніми точками можна встановити відповідність так, що кожна з двох відповідних точок буде центром стичної сфери в іншій), то γ_1 і γ_2 мають рівні постійні кривини. Встановити, як пов'язані їхні скрути у відповідних точках.

2. Говорять, що на $2n$-вимірному гладкому многовиді M існує комплексна структура, якщо на ньому існує атлас, усі відображення переходу якого голоморфні при ототожненні $\mathbb{R}^{2n}$ з $\mathbb{C}^n$ (тобто вони гладкі і мають вигляд $(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n) \mapsto (\tilde{x^1}, \tilde{y^1}, \ldots, \tilde{x^n}, \tilde{x^n})$, при цьому виконуються умови Коші-Рімана $\frac{\partial\tilde{x^i}}{\partial x^j} = \frac{\partial\tilde{y^i}}{\partial y^j}$ і $\frac{\partial\tilde{x^i}}{\partial y^j} = -\frac{\partial\tilde{y^i}}{\partial x^j}$ для будь-яких i і j від 1 до n). Довести, що у цьому випадку M орієнтовний.

Варіант 8

1. На бінормалях розташованої у просторі пласкої кривої γ в одному й тому ж напрямку відкладаються відрізки, що пропорційні натуральному параметру s кривої γ. Знайти кривину та скрут кривої γ^*, що утворена кінцями цих відрізків. Довести, що γ^* перетинає бінормалі γ під постійним кутом, і знайти його.

2. Довести, що група $\mathrm{U}(n)$ унітарних матриць є гладким вкладеним підмноговидом у просторі всіх комплексних $(n \times n)$-матриць (який ми природнім чином ототожнюємо з $\mathbb{R}^{2n^2}$), встановити (дійсну) вимірність цього многовида і описати його (матричний) дотичний простір у одиничній матриці.

Варіант 9

1. Довести, що кривина просторової кривої у точці дорівнює кривині її проекції на стичну площину у цій точці.

2. Довести, що якщо на $2n$-вимірному гладкому многовиді M існує зовнішня 2-форма, невироджена в кожній точці, то на ньому існує майже комплексна структура, тобто $(1,1)$-тензорне поле J операторів $J_p\colon T_pM \to T_pM$ таке, що $(J_p)^2 = -id$ для будь-якої точки $p \in M$.

Варіант 10

1. Довести, що якщо відношення скрута до кривини просторової кривої γ постійне, то її евольвента $\gamma^* = \gamma + (C - s)\tau$ є пласкою кривою (тут s – натуральний параметр γ, C – константа).

2. Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – гладкі векторні поля на многовиді M такі, що їх значення утворюють базис дотичного простору у кожній точці M, а $\omega^1, \ldots, \omega^n$ – дуальна система гладких 1-форм: $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$ для будь-яких i та j від 1 до n. Нехай $[X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k$ для будь-яких i та j від 1 до n. Довести рівняння Маурера-Картана: $d\omega^k = -\frac{1}{2} c^k_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$ для всіх k від 1 до n.

Варіант 11

1. Стичною сферою у деякій точці просторової кривої з ненульовим скрутом зветься сфера, у якої з кривою у цій точці дотик третього порядку. Довести, що якщо γ_2 – лінія центрів стичних сфер (аналог еволюти) кривої γ_1 постійної кривини, то вона має ту ж постійну кривину, і γ_1 – лінія центрів стичних сфер γ_2. Встановити, як пов'язані їхні скрути у відповідних точках.

2. Довести що 3-вимірний дійсний проективний простір $\mathbb{R}P^3$ орієнтовний.

Варіант 12

1. Нехай дві криві γ_1 та γ_2 на площині дотикаються у деякій точці p, мають у цій точці додатні кривини k_1 та k_2 відповідно, і нехай у деякому околі p носій γ_2 лежить між носієм γ_1 і їхньою спільною дотичною. Довести, що тоді $k_1 \geqslant k_2$.

2. Довести, що стандартна стереографічна проекція $S^2 \backslash \{N\} \to E^2$ є конформною еквівалентністю.

Варіант 13

1. Описати всі просторові криві, що мають дану сферичну індикатрису бінормалей $\beta \colon I \to S^2$ (тобто всі ті, для яких β буде їхнім полем бінормалей).

2. Довести, що дотичне розшарування будь-якого многовида є орієнтовним многовидом.

Варіант 14

1. Довести, що крива на (фіксованій) сфері однозначно з точністю до ізометрії визначається заданням кривини як функції натурального параметра (одним натуральним рівнянням). Тобто будь-які дві криві, у яких ці функції співпадають, повинні переходити одна в одну під дією деякої ізометрії сфери. Те ж саме для задання скруту як функції натурального параметра разом зі значенням кривини в одній точці.

2. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – локально скінченне відкрите покриття гладкого многовида M, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – підпорядковане цьому покриттю гладке розбиття одиниці, і для кожного $\alpha \in A$ на U_α задана ріманова метрика g_α. Довести, що $\sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha g_\alpha$ – ріманова метрика на M. Відомо, що у будь-яке відкрите покриття гладкого многовида можна вписати локально скінченне відкрите покриття, якому підпорядковане деяке гладке розбиття одиниці. Вивести з цього, що на будь-якому гладкому многовиді існує ріманова метрика.