Функціональний аналіз II
Тема 3. Спектральна теорія операторів
Лекції 11-12

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

на дошці

Нехай X – банаховий простір. Простір $L(X) = L(X, X)$ неперервних операторів $T\colon X \to X$ також утворює банахів простір в операторній нормі; в цьому просторі природним способом визначені операції додавання операторів і множення оператора на число. Більше того, визначене множення (композиція операторів). Тобто з операторами, які діють в одному просторі, в якомусь сенсі можна працювати як з числами: додавати, множити, здійснювати граничні переходи. Ця аналогія з числами виявляється досить плідною. Вона дозволяє у багатьох випадках знайти прості методи міркування для одержання важливих і потрібних результатів.

Лема про мале збурення одиничного оператора. Нехай $T \in L(X)$ задовольняє умову $\|T\| < 1$. Тоді оператор $I - T$ оборотний, причому виконується така формула обернення:

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots$$

Доведення. Доведемо формулу обернення. Оскільки $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$, то ряд $I + T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots$ мажорується збіжною геометричною прогресією і, отже, збіжний до деякого оператора $U \in L(X)$. Нам залишилось перевірити, що

$$U(I - T) = (I - T)U = I.$$

Обидві потрібні рівності отримуються простим розкриттям дужок. $\square$

Теорема про мале збурення оборотного оператора. Нехай $U, T \in L(X)$, U оборотний і $\|T\| < \frac{1}{\|U^{-1}\|}$. Тоді оператор $U - T$ також оборотний. Іншими словами, якщо U оборотний, то ціла куля радіуса $r = \frac{1}{\|U^{-1}\|}$ з центром в U складається з оборотних операторів.

Доведення. Запишемо $U - T$ у вигляді добутку: $U - T = U(I - U^{-1}T)$. Перший співмножник оборотний за умовою, а другий задовольняє вимоги леми:

$$\left\|U^{-1}T\right\| \leqslant \left\|U^{-1}\right\| \cdot \|T\| < 1.$$

Тому другий співмножник також оборотний, що дає нам потрібну оборотність оператора $U - T$.

Наслідок. Підмножина усіх оборотних операторів відкрита в $L(X)$, а необоротних, відповідно, замкнена.

Теорема. Нехай $T \in L(X)$ – оборотний оператор і $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$. Тоді $T_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} T^{-1}$. Іншими словами, в $L(X)$ операція переходу до оберненого оператора неперервна в своїй області визначення.

Доведення. Множенням на T^{-1} задача зводиться до випадку $T = I$. Отож нехай $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$. Введемо позначення $I - T_n = R_n$. Зафіксуємо номер N, починаючи з якого $\|R_n\| < \frac{1}{2}$. Для $n > N$ маємо:

$$\left\|T_n^{-1} - I\right\| = \left\|(I - R_n)^{-1} - I\right\| = \left\|(I + R_n + R_n^2 + \ldots) - I\right\|$$

$$= \left\|R_n + R_n^2 + \ldots\right\| \leqslant \|R_n\| \cdot \left\|I + R_n + R_n^2 + \ldots\right\|$$

$$\leqslant \|R_n\| \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) = 2\|R_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Власні числа і спектр – мотивація на дошці.

Означення. Комплексне число λ називається точкою спектра оператора $T \in L(X)$, якщо оператор $T - \lambda I$ необоротний. Множина таких чисел називається спектром оператора T і позначається $\sigma(T)$. Комплексне число, яке не належить до спектра оператора T, називається регулярною точкою оператора T.

Приклад. Спектр одиничного оператора.

Теорема. Спектр будь-якого оператора $T \in L(X)$ має такі властивості:

- $\sigma(T)$ замкнений в $\mathbb{C}$;
- спектр оператора T обмежений і лежить в замкненому крузі з центром в 0 і радіусом $\|T\|$.

Доведення. Замкненість. Нехай $\lambda_n \in \sigma(T)$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$. Тоді оператори $T - \lambda_n I$ необоротні, і їхня границя $T - \lambda I$ також необоротна з огляду на замкненість множини необоротних операторів. Тобто $\lambda \in \sigma(T)$, і замкненість спектра доведено.
Обмеженість. Нехай $|\lambda| > \|T\|$. Тоді $T - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$, а оператор $I - \frac{1}{\lambda}T$ оборотний за лемою про мале збурення одиничного оператора. Отже, всі комплексні числа, більші за модулем за норму оператора T, – це регулярні точки, відповідно, всі точки спектра не перевищують $\|T\|$ за модулем.

Резольвентою оператора $T \in L(X)$ називається функція

$$R_T : \mathbb{C} \backslash \sigma(T) \to L(X),$$

яка визначається формулою $R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$.
Властивості резольвенти:
1. Основна тотожність для резольвенти:

$$R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\lambda - \mu) R_T(\lambda) R_T(\mu).$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}(T - \mu I)^{-1} \\
&= (T - \lambda I)^{-1} \left((T - \mu I) - (T - \lambda I)\right)(T - \mu I)^{-1} \\
&= (T - \lambda I)^{-1} - (T - \mu I)^{-1}.
\end{aligned}$$

2. Комутативність: $R_T(\lambda) R_T(\mu) = R_T(\mu) R_T(\lambda)$ – очевидним чином випливає з попередньої властивості.

3. Неперервність у кожній точці λ області визначення.
Випливає з неперервності операцій додавання, множення і переходу до оберненого оператора.
4. Резольвента прямує до нуля на нескінченності.
Прямування $\lambda \to \infty$ коректне, бо спектр – обмежена множина; у доведенні ми будемо вважати $|\lambda| > 2||T||$. Перепишемо вираз для резольвенти:

$$R_T(\lambda) = -\lambda^{-1}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Оскільки $|\lambda| > 2||T||$, то $\left\|\lambda^{-1}T\right\| < \frac{1}{2}$, і ми можемо застосувати до $I - \lambda^{-1}T$ формулу обернення:

$$R_T(\lambda) = -\lambda^{-1}(I + \lambda^{-1}T + \lambda^{-2}T^2 + ...).$$

Переходячи до норм і використовуючи нерівність трикутника, одержимо:

$$\| R_T(\lambda) \| < \frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{2}{|\lambda|}.$$

Останній вираз, вочевидь, прямує до 0 при $\lambda \to \infty$.

Означення. Нехай D – відкрита множина на комплексній площині, E – банахів простір. Функція $F\colon D \to E$ називається диференційовною в точці $\lambda_0 \in D$, якщо існує

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Ця границя, як і в скалярному випадку, називається похідною функції F в точці λ_0 і позначається $F'(\lambda_0)$. Функція називається аналітичною в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці області.

Твердження. Резольвента аналітична в своїй області визначення.

Доведення. Скористаємось основною тотожністю для резольвенти і обчислимо потрібну границю:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{R_T(\lambda) - R_T(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda\to\lambda_0} R_T(\lambda)R_T(\lambda_0) = (R_T(\lambda_0))^2. \quad \square$$

Теорема Ліувілля для цілих функцій зі значеннями в банаховому просторі. Якщо функція $F\colon \mathbb{C} \to E$ аналітична і обмежена, то вона стала.

Доведення. Нехай $F(z_1) \neq F(z_2)$ для деяких точок $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. За теоремою Гана–Банаха, існує такий функціонал $f \in E^*$, що $f(F(z_1)) \neq f(F(z_2))$. Розглянемо допоміжну функцію $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(F(z))$. На підставі неперервності функціонал f можна переставляти зі знаком границі, тому функція g аналітична. Крім того,

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |g(z)| \leqslant \|f\| \cdot \sup_{z\in\mathbb{C}} \|F(z)\| < \infty,$$

тому, згідно з теоремою Ліувілля для скалярних функцій, g – стала, тобто $g(z_1) = g(z_2)$. Одержана суперечність доводить теорему.