Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 14

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Означення (1937, Henri Cartan (1904–2008)). Сім'я підмножин $\mathfrak{F}$ множини X називається фільтром на X, якщо для неї виконуються такі аксіоми:

(i) сім'я $\mathfrak{F}$ непорожня;

(ii) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;

(iii) якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$;

(iv) якщо $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathfrak{F}$.

Наслідки з аксіом фільтра:

(v) $X \in \mathfrak{F}$ (застосовуємо (i) і (iv));

(vi) перетин довільного скінченного числа елементів фільтра – знову елемент фільтра;

(vii) перетин довільного скінченного числа елементів фільтра не порожній.

Прикладом фільтра може бути система $\mathfrak{N}_x$ всіх околів точки x в топологічному просторі X.

Означення. Непорожня сім'я підмножин $\mathfrak{D}$ множини X називається базою фільтра, якщо

(a) $\emptyset \notin \mathfrak{D}$ і

(b) для довільних $A, B \in \mathfrak{D}$ існує таке $C \in \mathfrak{D}$, що $C \subset A \cap B$.

Нехай $\mathfrak{D}$ – база фільтра. Фільтром, породженим базою $\mathfrak{D}$, називається сім'я $\mathfrak{F}$ всіх множин $A \subset X$, що містить як підмножину хоча б один елемент бази $\mathfrak{D}$.
Перевірку коректності останнього означення, тобто, що фільтр $\mathfrak{F}$, породжений базою $\mathfrak{D}$, насправді є фільтром, залишаємо читачеві.

Якщо X – топологічний простір, $x_0 \in X$, а за базу $\mathfrak{D}$ візьмемо сім'ю всіх відкритих множин, що містять x_0, то фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, – це фільтр $\mathfrak{N}_{x_0}$ всіх околів точки x_0.

Ще один приклад. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність елементів множини X. Тоді сім'я $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ "хвостів" послідовності (x_n) (це є сім'я множин вигляду $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$, $N \in \mathbb{N}$) – це база фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, породжений базою $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$, називається фільтром, асоційованим із послідовністю (x_n).

Теорема 1. Нехай X, Y – множини, $f : X \to Y$ – функція і $\mathfrak{D}$ – база фільтра в X. Тоді сім'я $f(\mathfrak{D})$ всіх множин вигляду $f(A)$, $A \in \mathfrak{D}$ – це база фільтра в Y.

Доведення. Виконання аксіоми (a) бази фільтра очевидне. Далі, нехай $f(A)$, $f(B)$ – довільні елементи сім'ї $f(\mathfrak{D})$, $A, B \in \mathfrak{D}$. За аксіомою (b), існує таке $C \in \mathfrak{D}$, що $C \subset A \cap B$. Тоді $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$, що доводить виконання (b) і для $f(\mathfrak{D})$. $\square$

Зокрема, якщо $\mathfrak{F}$ – фільтр на X, то $f(\mathfrak{F})$ – база фільтра в Y.

Образом фільтра $\mathfrak{F}$ при відображенні f називають фільтр $f[\mathfrak{F}]$, породжений базою $f(\mathfrak{F})$. Еквівалентне формулювання: $A \in f[\mathfrak{F}]$ тоді і тільки тоді, коли $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$.

Нагадаємо, що сім'я множин $\mathfrak{C}$ називається центрованою, якщо перетин довільного скінченного набору елементів сім'ї $\mathfrak{C}$ непорожній.

Теорема 2. Нехай $\mathfrak{C} \subset 2^X$ – непорожня сім'я множин. Для того, щоб існував фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ (тобто такий, що всі елементи сім'ї $\mathfrak{C}$ є одночасно і елементами фільтра $\mathfrak{F}$) необхідно і досить, щоб $\mathfrak{C}$ було центрованою сім'єю.

Доведення. Якщо $\mathfrak{F}$ – фільтр і $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$, то довільний скінченний набір $A_1, A_2, \ldots, A_n$ елементів сім'ї $\mathfrak{C}$ буде складатися з елементів фільтра $\mathfrak{F}$. Звідси випливає (властивість (vii) фільтрів), що $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$. Необхідність доведена. Нехай, навпаки, $\mathfrak{C}$ – центрована сім'я. Тоді сім'я $\mathfrak{D}$ всіх множин вигляду $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, де $n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$, буде базою фільтра. За $\mathfrak{F}$ потрібно взяти фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$. $\square$

Означення. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на X. Сім'я підмножин $\mathfrak{D}$ називається базою фільтра $\mathfrak{F}$, якщо $\mathfrak{D}$ – це база фільтра і фільтр, породжений $\mathfrak{D}$, збігається з $\mathfrak{F}$.

Теорема 3. Щоб сім'я $\mathfrak{D}$ була базою фільтра $\mathfrak{F}$, необхідно і досить, щоб виконувались дві умови:

- $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$ і
- для довільного $A \in \mathfrak{F}$ існує таке $B \in \mathfrak{D}$, що $B \subset A$.

Означення Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на X і $A \subset X$. Слідом фільтра $\mathfrak{F}$ на A називається сім'я підмножин $\mathfrak{F}_A = \{A \cap B : B \in \mathfrak{F}\}$.

Теорема 4. Щоб сім'я $\mathfrak{F}_A$ була фільтром на A, необхідно і досить, щоб всі перетини $A \cap B : B \in \mathfrak{F}$ були непорожніми. Зокрема, $\mathfrak{F}_A$ буде фільтром, якщо $A \in \mathfrak{F}$.

Нижче наведені приклади фільтрів і баз фільтрів. Багато з цих прикладів ми будемо використовувати. Читачеві пропонуємо перевірити відповідні аксіоми.

14.1 Фільтр Фреше на $\mathbb{N}$: елементами фільтра є доповнення до скінченних підмножин натурального ряду. База фільтра Фреше: послідовність множин вигляду $A_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}, A_2 = \{2, 3, 4, \ldots\}, \ldots, A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}, \ldots$.

14.2 Фільтр околів нескінченно віддаленої точки в нормованому просторі X: множина $A \subset X$ належить до фільтра, якщо множина $X \backslash A$ обмежена.

14.3 Фільтр $\mathfrak{N}_x^0$ проколотих околів фіксованої точки x в топологічному просторі X: база фільтра складається з множин вигляду $U \backslash \{x\}$, де U – окіл точки x. Для коректності означення необхідно, щоб точка x не була ізольованою.

14.4 Фільтр околів «точки» $+\infty$ в $\mathbb{R}$: база фільтра складається з множин вигляду $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.
14.5 Фільтр околів «точки» $a{+}0$ в $\mathbb{R}$: база фільтра складається з множин вигляду (a, b), $b \in (a, +\infty)$.
14.6 Статистичний фільтр $\mathfrak{F}_s$ на $\mathbb{N}$: $A \in \mathfrak{F}_s$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} = 1.$$

Прямими дужками $|\ |$ тут позначено кількість елементів множини.
14.7 У фільтрів з вправ 1, 2, 4, 5 є зліченні бази, в статистичного фільтру зліченні бази немає.
14.8 Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність в X, а функція $f\colon \mathbb{N} \to X$ діє за правилом $f(n) = x_n$. Тоді образ фільтра Фреше під дією f – це фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, асоційований із послідовністю (x_n).

Означення. Нехай на множині X задані фільтри $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$. Будемо говорити, що $\mathfrak{F}_1$ мажорує $\mathfrak{F}_2$, якщо $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$; іншими словами, якщо кожен елемент фільтра $\mathfrak{F}_2$ одночасно є елементом і фільтра $\mathfrak{F}_1$.

Приклад. Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність в X, а $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ – її підпослідовність. Тоді фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$, асоційований із підпослідовністю, мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, асоційований із самою послідовністю. Справді, нехай $A \in \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$. Тоді існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset A$. Але тоді й $\{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty} \subset A$, тобто $A \in \mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$.

Означення. Нехай X – топологічний простір, $\mathfrak{F}$ – фільтр на X. Точка $x \in X$ називається границею фільтра $\mathfrak{F}$ (позначення – $x = \lim \mathfrak{F}$), якщо $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр околів точки x. Іншими словами, $x = \lim \mathfrak{F}$, якщо кожен окіл точки x належить до фільтра $\mathfrak{F}$.

Точка $x \in X$ називається граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$, якщо кожен окіл точки x перетинається зі всіма елементами фільтра $\mathfrak{F}$. Множина всіх граничних точок фільтра $\mathfrak{F}$ позначається $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$.

Приклад. Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність у топологічному просторі X. Тоді $\lim \mathfrak{F}_{\{x_n\}} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, а $\mathrm{LIM}(F_{\{x_n\}})$ збігається із множиною граничних точок послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.