Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 13

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Для будь-якого $s \in G$ означимо оператори $L_s, R_s \colon C(G) \to C(G)$ лівого і правого зсувів:

$$(L_s f)(x) = f(sx), \quad (R_s f)(x) = f(xs).$$

Означимо також оператор симетрії $\Psi \colon C(G) \to C(G)$ формулою $(\Psi f)(x) = f(x^{-1})$.
Лінійний функціонал $\mathcal{I}$ на $C(G)$ називається лівоінваріантним середнім, якщо він задовольняє такі умови:

(i) якщо $f \geqslant 0$, то $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$;

(ii) $\mathcal{I}(\mathbb{1}) = 1$;

(iii) $\mathcal{I}(L_s f) = \mathcal{I}(f)$ для будь-якого $s \in G$ і будь-якої функції $f \in C(G)$.

Аналогічно визначається правоінваріантне середнє, а функціонал, що водночас є ліво- та правоінваріантним середнім, називають інваріантним середнім.

Для будь-якої функції $f \in C(G)$ означимо множини $c_L(f)$ і $c_R(f)$ як замикання опуклих оболонок множин всіх лівих і всіх правих зсувів функції f відповідно:

$$c_L(f) = \overline{\operatorname{conv}}\{L_s f : s \in G\}, \quad c_R(f) = \overline{\operatorname{conv}}\{R_s f : s \in G\}.$$

Приймемо ще одне позначення: символом $\mathbb{1}$ позначимо функцію $\mathbb{1}_G$, що тотожно дорівнює одиниці на G.

Лема 2 з попередньої лекції. Нехай G – компактна топологічна група. Тоді:

A. Для будь-якої $f \in C(G)$ множина $c_L(f)$ компактна.
B. Множина $c_L(f)$ інваріантна щодо всіх операторів лівого зсуву, причому ці оператори діють бієктивно на $c_L(f)$.
C. Якщо $g \in c_L(f)$, то $c_L(g) \subset c_L(f)$.
D. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ існує такий скаляр a, що $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$.

Аналогічні властивості мають і множини $c_R(f)$:

A'. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ множина $c_R(f)$ компактна в $C(G)$.

B'. Множина $c_R(f)$ інваріантна щодо всіх операторів правого зсуву, причому оператори правого зсуву діють бієктивно на $c_R(f)$.

C'. Якщо $g \in c_R(f)$, то $c_R(g) \subset c_R(f)$.

D'. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ існує такий скаляр b, що $b \cdot \mathbb{1} \in c_R(f)$.

Доведення

A. – доведено на попередній лекції.
B. Сім'я $H = \{L_s f : s \in G\}$ інваріантна щодо оператора L_t лівого зсуву:

$$L_t H = \{L_t L_s f : s \in G\} = \{L_{st} f : s \in G\} \subset H.$$

На підставі лінійності і неперервності оператора L_t опукла оболонка і замикання зберігають інваріантність. Бієктивність оператора L_t на $c_L(f)$ випливає з існування оберненого $L_{t^{-1}}$, відносно якого $c_L(f)$ також інваріантне.

C. Якщо $g \in c_L(f)$, то, згідно B, $L_s g \in c_L(f)$ для будь-якого $s \in G$. Тобто $\{L_s g : s \in G\} \subset c_L(f)$. Залишається скористатись опуклістю і замкненістю множини $c_L(f)$.

D. Застосувавши теорему Какутані до опуклого компакта $c_L(f)$, одержимо існування елемента $g \in c_L(f)$, нерухомого щодо всіх ізометрій компакта $c_L(f)$. Зокрема, g – нерухома точка всіх операторів лівого зсуву. Введемо позначення $a = g(e)$ і доведемо, що $a \cdot \mathbb{1} = g$, тобто g і є шукана тотожна стала, що лежить в $c_L(f)$. Справді, для будь-якої точки $s \in G$ маємо

$$g(s) = (L_s g)(e) = g(e) = a.$$

Властивості A'–D' множин $c_R(f)$ можна або доводити аналогічно, або звести до доведених властивостей A–D за допомогою формули $c_R(f) = \Psi\left(c_L(\Psi f)\right)$. $\square$

Посилимо твердження D і D' попередньої леми.

Лема 3. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ є тільки один скаляр a з $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$ і тільки один скаляр b з $b \cdot \mathbb{1} \in c_R(f)$, причому $a = b$.

Доведення. Позначимо множину тих скалярів a, для яких $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$, через A_f, а тих b, для яких $b \cdot \mathbb{1} \in c_R(f)$, через B_f. Доведемо, що $a = b$ для будь-якого $a \in A_f$ і будь-якого $b \in B_f$. Цим буде доведено, що $A_f = B_f$ і що обидві ці множини складаються з однієї точки. Для цього зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо опуклі комбінації зсувів функції f, що наближають $a \cdot \mathbb{1}$ і $b \cdot \mathbb{1}$ з точністю до ε:

$$\left\| a \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f \right\| < \varepsilon; \tag{1}$$

$$\left\| b \cdot \mathbb{1} - \sum_{j=1}^{m} \mu_j R_{t_j} f \right\| < \varepsilon. \tag{2}$$

Діючи на $a \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f$ оператором $\mu_j R_{t_j}$, підсумовуючи за j і враховуючи, що $R_{t_j}\mathbb{1} = \mathbb{1}$, $\mu_j \geqslant 0$ і $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j = 1$, з (1) одержуємо, що

$$\left\| a \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j R_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon.$$

Аналогічно з (2) виводимо, що

$$\left\| b \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j R_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon$$

(не забуваймо про комутовність операторів лівого і правого зсувів). Отже, $\|a \cdot \mathbb{1} - b\mathbb{1}\| < 2\varepsilon$, що з огляду на довільність ε дає потрібну рівність $a = b$. $\square$

Теорема (A. Haar 1933, J. von Neumann, 1934). Для будь-якої компактної топологічної групі G існує існує єдине лівоінваріантне середнє $\mathcal{I}$; воно водночас буде і правоінваріантним середнім. Відповідно, на будь-якій компактній топологічній групі G існує єдина регулярна ймовірнісна борелева міра μ, що є лівою мірою Гаара. Ця міра буде водночас і мірою Гаара на $C(G)$.

Доведення. Почнемо з єдиності. Припустимо, що такий функціонал $\mathcal{I}$ існує. Тоді для будь-якої функції $f \in C(G)$ і будь-якого $g \in c_L(f)$ маємо з огляду на лівоінваріантність $\mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(f)$. Отже, $\mathcal{I}(f)$ дорівнює тій сталій a, для якої $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$. Це міркування не тільки доводить єдиність, але і вказує шлях побудови функціонала $\mathcal{I}$.

Доведемо існування потрібного функціонала. Для будь-якого $f \in C(G)$ виберемо число $\mathcal{I}(f)$ так, що $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$. За попередніми двома лемами такий вибір можливий і однозначний. Нехай $f \geqslant 0$. Тоді $c_L(f)$ складається тільки з невід'ємних функцій. Зокрема, $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1} \geqslant 0$, тобто $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$. Цим перевірено аксіому (i) лівоінваріантного середнього. Далі, $\mathbb{1} \in c_L(\mathbb{1})$, тобто $\mathcal{I}(\mathbb{1}) = 1$, чим доведено умову (ii). Нарешті, з п. C леми 2 і однозначності вибору $\mathcal{I}(f)$ випливає, що $\mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(f)$ для будь-якого $g \in c_L(f)$. Звідси випливає, зокрема, аксіома (iii) лівоінваріантного середнього.

Доведемо лінійність функціонала $\mathcal{I}$. Однорідність очевидна, перевіримо адитивність. Нехай f, $g \in C(G)$. За побудовою, існує опукла комбінація лівих зсувів функції f, що наближає $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1}$ з точністю до ε:

$$\left\| \mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f \right\| < \varepsilon. \tag{3}$$

Розглянемо допоміжну функцію $\tilde{g} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} g$. Оскільки $\tilde{g} \in c_L(g)$, то $\mathcal{I}(\tilde{g}) = \mathcal{I}(g)$. Отже, існує $\sum_{j=1}^{m} \mu_j L_{t_j} \tilde{g}$ – опукла комбінація лівих зсувів функції $\tilde{g}$, яка наближає $\mathcal{I}(g) \cdot \mathbb{1}$:

$$\left\| \mathcal{I}(g) \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j} L_{s_k} g \right\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Але з (3) легко вивести, що

$$\left\| \mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Додамо (4) і (5):

$$\left\| (\mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)) \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j s_k} (f + g) \right\| < 2\varepsilon.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_k\mu_j L_{t_j s_k}(f+g)$ – це опукла комбінація зсувів функції $f+g$, і з огляду на довільність ε остання умова означає, що $(\mathcal{I}(f)+\mathcal{I}(g))\cdot\mathbb{1}\in c_L(f+g)$, тобто

$$\mathcal{I}(f+g)=\mathcal{I}(f)+\mathcal{I}(g).$$

Отже, ми довели існування і єдиність лівоінваріантного середнього, а з ним і лівої міри Гаара. Тепер зазначимо, що, за лемою 3, для будь-якого $f\in C(G)$ функція $\mathcal{I}(f)\cdot\mathbb{1}$ лежить не тільки в $c_L(f)$, але і в $c_R(f)$. Відповідно, $\mathcal{I}(R_t f)\cdot\mathbb{1}\in c_R(R_t f)\subset c_R(f)$. З тої самої леми 3 в $c_R(f)$ є тільки одна функція вигляду $a\cdot\mathbb{1}$. Отже, $\mathcal{I}(R_t f)=\mathcal{I}(f)$. Цим доведено правоінваріантність середнього $\mathcal{I}$ і породженої ним міри. Нарешті, функціонал $\tilde{\mathcal{I}}(f)=\mathcal{I}(\Psi f)$ також буде лівоінваріантним середнім, отже, з огляду на єдиність лівоінваріантного середнього $\mathcal{I}(f)=\mathcal{I}(\Psi f)$. Звідси випливає інваріантність міри Гаара відносно симетрії $s\mapsto s^{-1}$. $\square$