Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 12

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Для будь-якого $s \in G$ означимо оператори $L_s, R_s \colon C(G) \to C(G)$ лівого і правого зсувів:

$$(L_s f)(x) = f(sx), \quad (R_s f)(x) = f(xs).$$

Означимо також оператор симетрії $\Psi \colon C(G) \to C(G)$ формулою $(\Psi f)(x) = f(x^{-1})$.

Лема 1. Оператори зсуву мають такі властивості:

I. $L_e = I$, $L_s L_t = L_{ts}$, зокрема, $(L_s)^{-1} = L_{s^{-1}}$.

II. $R_e = I$, $R_s R_t = R_{st}$, зокрема, $(R_s)^{-1} = R_{s^{-1}}$.

III. $L_s R_t = R_t L_s$.

IV. Оператори L_s, R_s і Ψ – бієктивні ізометрії простору $C(G)$.

V. $L_{s^{-1}} \Psi = \Psi R_s$.

Лінійний функціонал $\mathcal{I}$ на $C(G)$ називається лівоінваріантним середнім, якщо він задовольняє такі умови:

(i) якщо $f \geqslant 0$, то $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$;

(ii) $\mathcal{I}(\mathbb{1}) = 1$;

(iii) $\mathcal{I}(L_s f) = \mathcal{I}(f)$ для будь-якого $s \in G$ і будь-якої функції $f \in C(G)$.

Аналогічно визначається правоінваріантне середнє, а функціонал, що водночас є ліво- та правоінваріантним середнім, називають інваріантним середнім.
Наша мета – довести існування і єдиність інваріантного середнього на $C(G)$ і пов'язаного з ним об'єкту – міри Гаара на компактній групі G.

Приклади і ідея застосування – на дошці

Для будь-якої функції $f \in C(G)$ означимо множини $c_L(f)$ і $c_R(f)$ як замикання опуклих оболонок множин всіх лівих і всіх правих зсувів функції f відповідно:

$$c_L(f) = \overline{\operatorname{conv}}\{L_s f : s \in G\}, \quad c_R(f) = \overline{\operatorname{conv}}\{R_s f : s \in G\}.$$

Приймемо ще одне позначення: символом $\mathbb{1}$ позначимо функцію $\mathbb{1}_G$, що тотожно дорівнює одиниці на G.

Лема 2. Нехай G – компактна топологічна група. Тоді:

A. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ множина $c_L(f)$ компактна в $C(G)$.

B. Множина $c_L(f)$ інваріантна щодо всіх операторів лівого зсуву, причому ці оператори діють бієктивно на $c_L(f)$.

C. Якщо $g \in c_L(f)$, то $c_L(g) \subset c_L(f)$.

D. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ існує такий скаляр a, що $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$.

Аналогічні властивості мають і множини $c_R(f)$:

A'. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ множина $c_R(f)$ компактна в $C(G)$.

B'. Множина $c_R(f)$ інваріантна щодо всіх операторів правого зсуву, причому оператори правого зсуву діють бієктивно на $c_R(f)$.

C'. Якщо $g \in c_R(f)$, то $c_R(g) \subset c_R(f)$.

D'. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ існує такий скаляр b, що $b \cdot \mathbb{1} \in c_R(f)$.

Доведення

A. Введемо позначення $r = \|f\|$. На підставі того, що зсуви – це ізометрії, всі елементи вигляду $L_s f,\ s \in G$ лежать в $r\bar{B}_{C(G)}$. Оскільки $r\bar{B}_{C(G)}$ – опукла замкнена множина, то операції опуклої оболонки і замикання не виводять за межі цієї множини. Отже, $c_L(f) \subset r\bar{B}_{C(G)}$, чим доведено обмеженість множини $c_L(f)$. Множина $c_L(f)$ замкнена, отже для доведення компактності залишилось перевірити одностайну неперервність.

Скористаємось рівномірною неперервністю функції f і для даного $\varepsilon > 0$ виберемо такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що для будь-яких $x, y \in G$ з $x^{-1}y \in U$ має місце оцінка $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Оскільки для будь-якого $s \in G$ елементи sx і sy також близькі:

$$(sx)^{-1}(sy) = x^{-1}s^{-1}sy = x^{-1}y \in U,$$

така сама оцінка виконуватиметься і для функції $L_s f$:

$$|(L_s f)(x) - (L_s f)(y)| = |f(sx) - f(sy)| \leqslant \varepsilon.$$

Відповідно, ця сама оцінка збережеться для будь-якої опуклої комбінації $g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f$ лівих зсувів:

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, |(L_{s_k} f)(x) - (L_{s_k} f)(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Перехід до границі не змінить цієї оцінки, тобто імплікація $x^{-1}y \in U \Rightarrow \quad |h(x) - h(y)| \leqslant \varepsilon$ справджується для будь-якої функції $h \in c_L(f)$. Одностайна неперервність, а з нею і компактність множини $c_L(f)$ доведені.