Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 11

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Група G із заданою на ній відокремлюваною за Гаусдорфом топологією τ називається топологічною групою, якщо топологія узгоджена з груповою структурою в такому розумінні:

1) операція $(x, y) \mapsto x \cdot y$ добутку елементів неперервна за сукупністю змінних;
2) неперервна операція $x \mapsto x^{-1}$ переходу до оберненого елемента.

Властивості.

(i) Для будь-якого $x \in G$ множини вигляду xU, $U \in \mathfrak{O}_e$, утворюють базу околів елемента x.

(ii) Таку ж властивість має система множин $U \cdot x$, $U \in \mathfrak{O}_e$.

(iii) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що $U \cdot U \subset W$.

(iv) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що $U^{-1} \subset W$.

(v) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що одночасно

$$U \cdot U^{-1} \subset W, \; U^{-1}U \subset W \text{ і } U \cdot U \subset W.$$

Означення. Нехай G – топологічна група, Z – метричний простір. Відображення $f\colon G \to Z$ називається рівномірно неперервним, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що образи будь-яких U-близьких $x, y \in G$ близькі з точністю до ε: $x^{-1}y \in U \Rightarrow \rho\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon$.

Теорема 1. Нехай G – компактна топологічна група, Z – метричний простір. Тоді будь-яке неперервне відображення $f\colon G \to Z$ є рівномірно неперервним.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Скориставшись неперервністю f, для кожного $x \in G$ виберемо такий окіл $W_x \in \mathfrak{O}_e$, що для будь-якого $y \in G$, якщо $y \in xW_x$, то $\rho\left(f(x), f(y)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Далі, за властивістю (iii) топологічних груп, для кожного $x \in G$ можна вибрати відкритий окіл $U_x \in \mathfrak{O}_e$ так, що $U_x U_x \subset W_x$. Оскільки множини xU_x, $x \in G$ утворюють відкрите покриття компакта G, можна вибрати скінченне підпокриття. Тобто існує така скінченна підмножина $A \subset X$, що $\bigcup_{x \in A} xU_x \supset G$. Покладемо $U = \bigcap_{x \in A} U_x$. Перевіримо, що U – це шуканий окіл з означення рівномірної неперервності. Нехай $x, y \in G$ і $x^{-1}y \in U$. Виберемо таке $x_0 \in A$, що $x \in x_0 U_{x_0}$. Зокрема, $x \in x_0 W_{x_0}$, тобто $\rho(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Далі,

$$y \in xU \subset x_0 U_{x_0} U_{x_0} \subset x_0 W_{x_0},$$

тобто $\rho(f(y), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ і, за нерівністю трикутника, $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$. $\square$

Пропонуємо читачеві самостійно довести такий аналог теореми Арцела.

Теорема 2. Нехай G – компактна топологічна група. Для того, щоб сім'я F неперервних скалярнозначних функцій на G була передкомпактом в $C(G)$, необхідно і достатньо, щоб вона (a) була рівномірно обмеженою і (b) задовольняла таку умову одностайної неперервності: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що для будь-якої функції $f \in F$ і будь-яких $x, y \in G$, якщо $x^{-1}y \in U$, то $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Для будь-якого $s \in G$ означимо оператори $L_s, R_s \colon C(G) \to C(G)$ лівого і правого зсувів:

$$(L_s f)(x) = f(sx), \quad (R_s f)(x) = f(xs).$$

Означимо також оператор симетрії $\Psi \colon C(G) \to C(G)$ формулою $(\Psi f)(x) = f(x^{-1})$.

Лема . Оператори зсуву мають такі властивості:

I. $L_e = I$, $L_s L_t = L_{ts}$, зокрема, $(L_s)^{-1} = L_{s^{-1}}$.

II. $R_e = I$, $R_s R_t = R_{st}$, зокрема, $(R_s)^{-1} = R_{s^{-1}}$.

III. $L_s R_t = R_t L_s$.

IV. Оператори L_s, R_s і Ψ – бієктивні ізометрії простору $C(G)$.

V. $L_{s^{-1}} \Psi = \Psi R_s$.