Теорія міри і інтеграла
Тема 6 “Інтеграл Лебега”
Лекція 21

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Теорема 1. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ – інтегровна функція на A, $B \in \Sigma_A$. Тоді функція f інтегровна на B.

Теорема 2. Нехай $A_1, A_2 \in \Sigma$ – неперетинні множини, f інтегровна як на A_1, так і на A_2. Тоді f інтегровна на $A_1 \sqcup A_2$ і

$$\int\limits_{A_1 \sqcup A_2} f d\mu = \int\limits_{A_1} f d\mu + \int\limits_{A_2} f d\mu.$$

Наслідок 1. Якщо функція f інтегровна і невід'ємна на A, то функція множини $G(B) = \int_B f d\mu$ є скінченно-адитивною мірою на сім'ї $\Sigma_A = \{B \in \Sigma : B \subset A\}$.

Теорема 3. Нехай $f \geqslant 0$ на A, $\{A_k\}_1^\infty$ – деяке розбиття множини A на вимірні підмножини. Нехай далі на кожному з A_k функція f інтегровна і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$ збігається. Тоді f інтегровна на всій множині A і $\int\limits_{A} f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$.

Доведення. Позначимо $\int_{A_k} f d\mu$ через a_k, $k = 1, 2, \ldots$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і такі допустимі розбиття D_k множин A_k, $k = 1, 2, \ldots$, що $\left|a_k - S_{A_k}(f, D_k, T_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2^k}$ за будь-якого вибору T_k відмічених точок для відповідного D_k. Утворимо розбиття $D = \{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини A, взявши за елементи цього розбиття всі елементи розбиттів D_k, $k = 1, 2, \ldots$. Для будь-якого T – набору відмічених точок для D, позначимо через T_k, $k = 1, 2, \ldots$, частину набору T, яка потрапила на відповідне A_k. Маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_j} \left[|f(t)| \mu(\Delta_j)\right] = \sup_{T} \sum_{j=1}^{\infty} f(t_j) \mu(\Delta_j) =$$

$$= \sup_{T} \sum_{k=1}^{\infty} S_{A_k}(f, D_k, T_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) < \infty.$$

Ми довели, що розбиття D допустиме. Далі,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - S_A(f, D, T)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k - S_{A_k}(f, D_k, T_k)\right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

З огляду на пункт 2 теореми 1 лекції 20 нашу теорему доведено. □

Наслідок 2. В умовах наслідку 1 функція множини $G(B) = \int_B f d\mu$ – не тільки скінченно-адитивна, але й зліченно-адитивна міра на Σ_A.

Теорема 4. Нехай $(B_k)_1^{\infty}$ – послідовність попарно неперетинних вимірних множин і $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Функція f інтегровна на A тоді і тільки тоді, коли f інтегровна на кожному з B_k і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f|\, d\mu$ збігається. При цьому $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu$.

Доведення. У випадку $f \geqslant 0$ результат випливає з теореми 3 і наслідку 2. Тому твердження правильне для функцій f^{+} і f^{-}. Для завершення доведення потрібно застосувати формули $|f| = f^{+} + f^{-}$ і $f = f^{+} - f^{-}$. □

Наслідок 3. Нехай $\{B_k\}_1^{\infty}$ – розбиття множини $A \in \Sigma$ на вимірні підмножини, $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \mathbb{1}_{B_k}$ – зліченнозначна вимірна функція. Для того, щоб функція f була інтегровною на A необхідно і достатньо, щоб ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \mu(B_k)$ збігався абсолютно.

У цьому випадку $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \mu(B_k)$.

21.1. Чому в доведенні теореми 3 попередньої лекції D_ε – допустиме розбиття для функції $|f|$?

21.2. Перевірте формули
$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ і $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ з доведень наслідків 1 і 2 попередньої лекції.

21.3. Нехай A – множина міри нуль. Доведіть, що будь-яка функція f на A інтегровна і $\int_A f d\mu = 0$.

21.4. Нехай f і g – дві функції, задані на вимірній множині A, і $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$. Тоді, якщо f інтегровна, то g також інтегровна і $\int_A g d\mu = \int_A f d\mu$.

21.5. Нехай функції f і g інтегровні на A і $f \leqslant g$ майже скрізь. Тоді $\int_A f d\mu \leqslant \int_A g d\mu$.

21.6. Нехай $A \subset [a, b]$ – щільна на відрізку множина лебегової міри нуль. Доведіть, що функція $\mathbb{1}_A$ не інтегровна за Ріманом, але інтегровна за Лебегом на $[a, b]$. Чому дорівнює $\int_{[a,b]} \mathbb{1}_A d\lambda$?
21.7. Доведіть, що функція $f(x) = 1/x$ неінтегровна за мірою Лебега на відрізку $(0, 1]$.
21.8. Доведіть таке переформулювання теореми 2 попередньої лекції: функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ – інтегровна на множині A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ і будь-якого розбиття D множини A існує таке допустиме розбиття $D_\varepsilon \succ D$, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми функції f відрізняються менше ніж на ε:

$$\left|\bar{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon.$$

Нерівність Чебишова. Нехай $a > 0$ – деяка стала, g – інтегровна функція на A, $g \geqslant 0$, $B \subset A$ – така вимірна підмножина, що $g(t) \geqslant a$ для будь-якого $t \in B$. Тоді

$$\mu(B) \leqslant \frac{1}{a} \int_A g d\mu.$$

Доведення.

$$\int_A g d\mu \geqslant \int_B g d\mu \geqslant \int_B a d\mu = a\mu(B). \qquad \square$$

Теорема 5. Якщо простір з мірою повний, то кожна інтегровна на множині функція вимірна на цій множині.

Доведення. Нехай f – інтегровна функція на A. Виберемо подрібнюючу послідовність допустимих розбиттів $D_j = \{\Delta_k^j\}_{k=1}^{\infty}$, $D_1 \prec D_2 \prec D_3 \prec \ldots$, для кожного з яких

$$\left| \bar{S}_A \left(f, D_j\right) - \underline{S}_A \left(f, D_j\right) \right| < 1/j.$$

Означимо дві послідовності зліченнозначних функцій

$$\bar{f}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_k^j} f(t) \mathbb{1}_{\Delta_k^j} \text{ і } \underline{f}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{t \in \Delta_k^j} f(t) \mathbb{1}_{\Delta_k^j}.$$

Ці функції означені на множині $\tilde{A} \in \Sigma_A$ з $\mu(\tilde{A}) = \mu(A)$ і інтегровні на $\tilde{A}$. Переозначивши f, $\bar{f}_j$ і $\underline{f}_j$ нулем на $A \setminus \tilde{A}$, матимемо

$$\int_A \bar{f}_j d\mu = \bar{S}_A \left(f, D_j\right) \text{ і } \int_A \underline{f}_j d\mu = \underline{S}_A \left(f, D_j\right).$$

Послідовність $(\overline{f}_j)$ поточково не зростає і обмежена зверху функцією f. Отже, у $\overline{f}_j$ існує поточкова границя при $j \to \infty$, яку ми позначимо $\overline{f}$. Аналогічно, позначимо через $\underline{f}$ поточкову границю функцій $\underline{f}_j$ при $j \to \infty$. Функції $\underline{f}$ і $\overline{f}$ вимірні (як границі послідовностей вимірних функцій), $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$. Якщо ми доведемо, що $\underline{f} = \overline{f}$ майже скрізь, то отримаємо, що $\underline{f} = f = \overline{f}$ майже скрізь, відтак, функція f вимірна (тут ми користуємось повнотою міри). Позначимо через B множину тих точок, де $\underline{f} \neq \overline{f}$, а через B_n – множину тих точок, де $\overline{f} - \underline{f} > \frac{1}{n}$.

Оскільки $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, нам достатньо довести, що $\mu(B_n) = 0$ при будь-якому n. Зазначимо, що $\bar{f}_j - \underline{f}_j \geqslant \bar{f} - \underline{f}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$, отже, на B_n виконується оцінка $\bar{f}_j - \underline{f}_j > \frac{1}{n}$. За нерівністю Чебишова,

$$\mu(B_n) \leqslant n \int_A \left(\bar{f}_j - \underline{f}_j\right) d\mu = n\left(\bar{S}_A(f, D_j) - \underline{S}_A(f, D_j)\right) < \frac{n}{j}.$$

Спрямовуючи j до нескінченності, отримуємо рівність $\mu(B_n) = 0$. □

Зауваження 1. Якщо (Ω, Σ, μ) – неповний простір з мірою, (Ω, Σ', μ) – його поповнення, то інтегровна функція на (Ω, Σ, μ) може не бути Σ-вимірною, але обов'язково буде Σ'-вимірною. Як ми знаємо, ці два види вимірності не сильно відрізняються: для кожної Σ'-вимірної функції існує Σ-вимірна функція, яка майже скрізь збігається з нею. Щоб не затримуватися щоразу на цій неістотній відмінності, в межах теорії інтегрування всі інтегровні функції вважатимуться вимірними, тобто вимірність вважатимемо необхідною частиною означення інтегровності.

З нерівності Чебишова легко випливає таке корисне твердження.

Зауваження 2. Нехай $\int_A |f| \, d\mu = 0$. Тоді на множині A функція f майже скрізь дорівнює нулю.