Теорія міри і інтеграла
Тема 6 "Інтеграл Лебега"
Лекція 20

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай $A \in \Sigma$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ – деяка функція; $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – допустиме розбиття множини A, $T = \{t_k\}_1^{\infty}$ – набір відмічених точок. Інтегральною сумою функції f по множині A, яка відповідає парі (D, T), називається число

$$S_A(f, D, T) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k).$$

Допустимість розбиття D гарантує абсолютну збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k)$ в означенні інтегральної суми.

Верхньою інтегральною сумою функції f за розбиттям D називається число

$$\overline{S}_A(f, D) = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_k} [f(t)\mu(\Delta_k)],$$

а нижньою інтегральною сумою – число

$$\underline{S}_A(f, D) = \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{t \in \Delta_k} [f(t)\mu(\Delta_k)].$$

Лема.

(1) Для будь-якого вибору T відмічених точок

$$\underline{S}_A(f, D) \leqslant S_A(f, D, T) \leqslant \bar{S}_A(f, D).$$

(2) Нехай $D_1 \succ D$. Тоді

$$\underline{S}_A(f, D) \leqslant \underline{S}_A(f, D_1) \leqslant \overline{S}_A(f, D_1) \leqslant \overline{S}_A(f, D).$$

(3) $\underline{S}_A(f, D) = \inf\limits_T S_A(f, D, T)$ і $\overline{S}_A(f, D) = \sup\limits_T S_A(f, D, T)$.

Нехай $A \in \Sigma$ – вимірна множина, $f\colon A \to \mathbb{R}$ – деяка функція на A. Число $a \in \mathbb{R}$ називається інтегралом (інтегралом Лебега) функції f на множині A за мірою μ (позначення: $a = \int_A f d\mu$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття D_ε множини A, що для будь-якого розбиття D, яке є наступником D_ε, і будь-якого вибору відмічених точок T для D, $|a - S_A(f, D, T)| \leqslant \varepsilon$.

Функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ називається інтегровною на множині A за мірою μ, якщо для неї існує відповідний інтеграл.

Іншими словами, функція f інтегровна на A, якщо, починаючи з деякого розбиття, інтегральні суми визначені й існує границя інтегральних сум за напрямленістю розбиттів з відміченими точками. Ця границя називається інтегралом Лебега і позначається $\int_A f\, d\mu$.

Наступні твердження про інтеграл Лебега безпосередньо випливають з відповідних властивостей інтегральних сум і властивостей границі за напрямленістю.

1. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ – інтегровна функція, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді функція λf також інтегровна і $\int_A \lambda f d\mu = \lambda \int_A f d\mu$.
2. Якщо функції f і g інтегровні на A, то $f+g$ також інтегровна і $\int\limits_A (f+g) d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_A g d\mu$.
3. Якщо інтегровна функція $f \geqslant 0$ на A, то $\int\limits_A f d\mu \geqslant 0$.
4. Якщо $f \geqslant g$ на A, f і g інтегровні на A, то $\int\limits_A f d\mu \geqslant \int\limits_A g d\mu$.

5. Якщо $f\colon A \to \mathbb{R}$ – інтегровна функція, $f \geqslant 0$ і $\int\limits_A f d\mu = 0$, то всі функції g, що задовольняють нерівність $0 \leqslant g \leqslant f$, також інтегровні на A з $\int\limits_A g d\mu = 0$.
6. Нехай $a \in \mathbb{R}$ – деяка стала. Тоді $\int\limits_A a d\mu = a\mu(A)$.
7. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ – інтегровна функція, $a \in \mathbb{R}$ і $f \leqslant a$ на A. Тоді $\int\limits_A f d\mu \leqslant a\mu(A)$. Аналогічно, якщо $f \geqslant b$, то $\int\limits_A f d\mu \geqslant b\mu(A)$.

Теорема 1. Для функції $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \in \Sigma$, такі умови еквівалентні:

(1) функція інтегровна і $\int\limits_A f d\mu = a$;

(2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття $D_\varepsilon = \{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини A, що при будь-якому виборі T відмічених точок
$|a - S_A(f, D_\varepsilon, T)| < \varepsilon$;

(3) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття D_ε множини A, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми функції f наближають a з точністю до ε:
$\left|a - \overline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| \leqslant \varepsilon$ і $|a - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$.

Доведення. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) випливає властивостей, які ми нагадали на другому слайді. Справді, за умовою всі значення інтегральних сум $S_A(f, D_\varepsilon, T)$ лежать на відрізку $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, відтак, $\underline{S}_A(f, D) = \inf_T S_A(f, D, T)$ і $\overline{S}_A(f, D) = \sup_T S_A(f, D, T)$ лежать на тому ж відрізку. З тих самих властивостей випливає й імплікація (3) $\Rightarrow$ (1). А саме, нехай D_ε – розбиття з умови (3). Тоді для будь-якого розбиття $D \succ D_\varepsilon$, правильні оцінки

$$a - \varepsilon \leqslant \underline{S}_A(f, D_\varepsilon) \leqslant \underline{S}_A(f, D) \leqslant \overline{S}_A(f, D) \leqslant \overline{S}_A(f, D_\varepsilon) \leqslant a + \varepsilon.$$

Далі, для будь-якого вибору відмічених точок $T = \{t_k\}_1^\infty$ для D, $\underline{S}_A(f, D) \leqslant S_A(f, D, T) \leqslant \bar{S}_A(f, D)$. Отже,
$a - \varepsilon \leqslant S_A(f, D, T) \leqslant a + \varepsilon$ і $|a - S_A(f, D, T)| \leqslant \varepsilon$. □

Приклад 1. Нехай Σ – це σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин відрізка $[a, b]$, λ – міра Лебега на відрізку, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – інтегровна за Ріманом функція. Тоді функція f інтегровна за Лебегом на $[a, b]$ і $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(t) dt$.

Згідно з критерієм Коші збіжності за напрямленістю, функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ інтегровна на множині A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують таке допустиме розбиття D_ε множини A і такий вибір T відмічених точок, що
$$\left|S_A(f, D_\varepsilon, T) - S_A\left(f, D, \tilde{T}\right)\right| < \varepsilon$$
для будь-якого $D \succ D_\varepsilon$ і будь-якого вибору $\tilde{T}$ відмічених точок розбиття D. Оскільки $\left[\underline{S}_A(f, D_\varepsilon), \bar{S}_A(f, D_\varepsilon)\right]$ – це найменший відрізок, що містить всі можливі значення сум вигляду $S_A\left(f, D, \tilde{T}\right)$, одержуємо таке корисне переформулювання критерію Коші.

Теорема 2. Функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ інтегровна на множині A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття D_ε множини A, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми функції f відрізняються менше ніж на ε:
$$\left|\bar{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon.$$

Теорема 3. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ – інтегровна функція. Тоді функція $|f|$ також інтегровна.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, а $D_\varepsilon = \{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ – розбиття з попередньої теореми для функції f. Тоді

$$\left|\bar{S}_A(|f|, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(|f|, D_\varepsilon)\right| =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{t\in\Delta_k}[|f(t)|\,\mu(\Delta_k)] - \inf_{t\in\Delta_k}[|f(t)|\,\mu(\Delta_k)]\right)$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{t\in\Delta_k}[f(t)\mu(\Delta_k)] - \inf_{t\in\Delta_k}[f(t)\mu(\Delta_k)]\right)$$
$$= \bar{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Отож, для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми довели існування розбиття D_ε такого, що $\left|\bar{S}_A(|f|, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(|f|, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon$. За теоремою 2 цим доведено інтегровність функції $|f|$. □

Наслідок 1. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ – інтегровна функція. Тоді функції f^+ і f^- також інтегровні.

Доведення. Нагадаємо, що, за означенням, $f^+(t)$ збігається з $f(t)$ для тих t, де $f(t) > 0$; для тих t, де $f(t) \leqslant 0$, $f^+(t) = 0$. Аналогічно, $f^-(t) = |f(t)|$ в точках, де $f(t) \leqslant 0$, у решті точок $f^-(t) = 0$. З огляду на рівності $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ і $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ потрібне твердження випливає з попередньої теореми і вже зазначених властивостей інтеграла. $\square$

Наслідок 2. Нехай f і g – дві інтегровні функції. Тоді функції $\max\{f, g\}$ і $\min\{f, g\}$ також інтегровні.

Доведення. Безпосередньо випливає з формул
$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ і $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.
$\square$

Теорема 4. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ – інтегровна функція на A, $B \in \Sigma_A$. Тоді функція f інтегровна на B.

Доведення. За теоремою 2 для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття $D_\varepsilon = \left\{\Delta_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ множини A, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми функції f відрізняються менше, ніж на ε: $|\overline{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)| < \varepsilon$. Розглянемо множину K тих індексів k, для яких Δ_k перетинається з B. Тоді множини $\Delta_k^1 = B \cap \Delta_k$, $k \in K$ утворюють допустиме розбиття множини B. Позначимо це розбиття через $D\varepsilon^1$. Зазначимо, що

$$\sup_{t \in \Delta_k^1} f(t) \leqslant \sup_{t \in \Delta_k} f(t), \quad \inf_{t \in \Delta_k^1} f(t) \geqslant \inf_{t \in \Delta_k} f(t)$$

і $\mu\left(\Delta_k^1\right) \leqslant \mu(\Delta_k)$. Оцінимо величину $\left|\bar{S}_A\left(f, D_\varepsilon^1\right) - \underline{S}_A\left(f, D_\varepsilon^1\right)\right|$:

$$\left|\bar{S}_B\left(f, D^1_\varepsilon\right) - \underline{S}_B\left(f, D^1_\varepsilon\right)\right| =$$
$$\sum_{k\in K}\left(\sup_{t\in\Delta^1_k}\left[f(t)\mu\left(\Delta^1_k\right)\right] - \inf_{t\in\Delta^1_k}\left[f(t)\mu\left(\Delta^1_k\right)\right]\right)$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{t\in\Delta_k}\left[f(t)\mu\left(\Delta_k\right)\right] - \inf_{t\in\Delta_k}\left[f(t)\mu\left(\Delta_k\right)\right]\right)$$
$$= \left|\bar{S}_A\left(f, D_\varepsilon\right) - \underline{S}_A\left(f, D_\varepsilon\right)\right| < \varepsilon.$$

Ми довели, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує розбиття множини B, верхня і нижня інтегральні суми якого відрізняються менше ніж на ε. За теоремою 2 цим доведено інтегровність функції f на B $\square$

Теорема 5. Нехай $A_1, A_2 \in \Sigma$ – неперетинні множини і функція f інтегровна як на A_1, так і на A_2. Тоді f інтегровна на $A_1 \cup A_2$ і

$$\int\limits_{A_1 \cup A_2} f d\mu = \int\limits_{A_1} f d\mu + \int\limits_{A_2} f d\mu.$$

Доведення. Позначимо $\int_{A_i} f d\mu$ через a_i, $i = 1, 2$. Скористаємось умовою (2) теореми 1. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо такі допустимі розбиття D_1 і D_2 множин A_1 і A_2, що за будь-якого вибору T_1, T_2 відмічених точок $\left|a_i - S_{A_i}(f, D_i, T_i)\right| < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Утворимо розбиття D множини $A_1 \cup A_2$, взявши за елементи цього розбиття всі елементи розбиттів D_1 і D_2. Нехай T – довільний вибір відмічених точок для D. Через T_i, $i = 1, 2$ позначимо частину T, яка потрапляє на відповідну A_i. Тоді $S_{A_1 \cup A_2}(f, D, T) = S_{A_1}(f, D_1, T_1) + S_{A_2}(f, D_2, T_2)$ і, відповідно:

$$\left|a_1 + a_2 - S_{A_1 \cup A_2}(f, D, T)\right| \leqslant \left|a_1 - S_{A_1}(f, D_1, T_1)\right| + \\ + \left|a_2 - S_{A_2}(f, D_2, T_2)\right| < 2\varepsilon.$$

З довільності ε ми перебуваємо умовах вже згаданого критерію інтегровності. □

Наслідок 3. Якщо функція f інтегровна і невід'ємна на A, то функція множини $G(B) = \int_B f d\mu$ є скінченно-адитивною мірою на сім'ї $\Sigma_A = \{B \in \Sigma : B \subset A\}$.