Теорія міри і інтеграла
Тема 6 “Інтеграл Лебега”
Лекція 19

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Множина G із введеним на ній бінарним відношенням $\succ$ називається напрямленою множиною або напрямленістю, якщо

(a) $g \succ g$ для будь-якого $g \in G$;

(b) якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_3 \succ g_2$, то $g_3 \succ g_1$;

(c) для будь-яких двох елементів $g_1, g_2 \in G$ існує елемент g_3, що є наступним за обома: $g_3 \succ g_1$ і $g_3 \succ g_2$.

Нехай $(G, \succ)$ – напрямлена множина, $f\colon G \to \mathbb{R}$ – деяка функція. Число $a \in \mathbb{R}$ називається границею функції f за напрямленістю $(G, \succ)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий елемент $g \in G$, що для будь-якого $g_1 \succ g$ виконується нерівність $|f(g_1) - a| < \varepsilon$.

Позначення: $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, або, якщо напрямленість зрозуміла з контексту, $a = \lim_g f(g)$.

Функція $f\colon G \to \mathbb{R}$ називається збіжною за напрямленістю $(G, \succ)$, якщо існує $\lim\limits_{(G,\succ)} f$.

Зазначимо найпростіші властивості границі за напрямленістю:

1. Якщо $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, то для будь-якого $g \in G$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий елемент $g_1 \succ g$, що $|f(h) - a| < \varepsilon$ для будь-якого $h \succ g_1$.
2. Якщо $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$ і $b = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, то $a = b$ (єдиність границі).
3. Нехай для функцій f_1, f_2 існує таке $g \in G$, що $f_1(h) = f_2(h)$ для будь-якого $h \succ g$. Тоді, якщо одна з цих функцій збігається за напрямленістю $(G, \succ)$, то й інша збігається, і $\lim\limits_{(G,\succ)} f_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$. Тому для означення границі функція не обов'язково має бути визначеною скрізь на G. Достатньо, щоб функція була визначена для всіх h, які наступні за деяким фіксованим елементом $g \in G$.

4. Нехай $f_1 \leqslant f_2$ і границі функцій f_1 і f_2 за напрямленістю G існують. Тоді $\lim\limits_{(G,\succ)} f_1 \leqslant \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$.
5. Нехай $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$, $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$ і функція двох змінних $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неперервна в точці (a_1, a_2). Тоді $\lim_g F(f_1(g), f_2(g))$ існує і дорівнює $F(a_1, a_2)$.
6. Якщо існує $\lim\limits_{(G,\succ)} f$, то для будь-якого скаляра $t \in \mathbb{R}$ існує $\lim\limits_{(G,\succ)} tf$ і $\lim\limits_{(G,\succ)} tf = t \lim\limits_{(G,\succ)} f$.
7. Якщо $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$ і $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$, то $a_1 + a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} (f_1 + f_2)$.

Доведемо наприклад властивість 5 (властивості 6 і 7 випливають з 5). Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta > 0$ так, щоб для будь-якої точки $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ з нерівності $\max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} < \delta$ випливало, що $|F(a_1, a_2) - F(b_1, b_2)| < \varepsilon$. Оскільки $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$, то існує таке $g \in G$, що для будь-якого $h \succ g$ виконується нерівність $|f_1(h) - a_1| < \delta$. Оскільки $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$, то за першою з перерахованих вище властивостей існує такий елемент $g_1 \succ g$, що $|f_2(h) - a_2| < \delta$ для будь-якого $h \succ g_1$. Тоді для будь-якого $h \succ g_1$ виконуються обидві нерівності $|f_1(h) - a_1| < \delta$ і $|f_2(h) - a_2| < \delta$. Отже, для будь-якого $h \succ g_1$ маємо

$$|F(a_1, a_2) - F(f_1(h), f_2(h))| < \varepsilon,$$

що і треба було довести. $\square$

Критерій Коші збіжності за напрямленістю. Для того, щоб функція $f\colon G \to \mathbb{R}$ збігалась за напрямленістю $(G, \succ)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий елемент $g \in G$, що $|f(g) - f(h)| < \varepsilon$ для всіх $h \succ g$.

Доведення. Необхідність. Нехай f збігається за напрямленістю $(G, \succ)$ і $\lim_g f(g) = a$. За означенням границі, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий елемент $g \in G$, що для будь-якого $h \succ g$ виконується нерівність $|f(h) - a| < \varepsilon/2$. Тоді для будь-якого h, що є наступником g,

$$|f(g) - f(h)| \leqslant |f(g) - a| + |a - f(h)| < \varepsilon.$$

Достатність. Скористаємось спочатку умовою теореми з $\varepsilon = 1$. Нехай $g_1 \in G$ – такий елемент, що $|f(g_1) - f(h)| < 1$ для будь-якого $h \succ g_1$. Тепер скористаємось умовою з $\varepsilon = 1/2$. Позначимо через g_2 такий елемент, що $g_2 \succ g_1$ і $|f(g_2) - f(h)| < 1/2$ для будь-якого h, що є наступником g_2.

Продовжуючи це міркування, отримаємо таку послідовність $g_1 \prec g_2 \prec g_3 \prec \ldots$, що для будь-якого $h \succ g_n$ виконується нерівність $|f(g_n) - f(h)| < 1/n$. Зокрема, $|f(g_n) - f(g_m)| < 1/n$ для будь-яких $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Отже, числова послідовність $(f(g_n))$ задовольняє умову Коші і, тому, збіжна. Позначимо $\lim_{n\to\infty} f(g_n)$ через a. Доведемо, що $\lim_g f(g) = a$. Справді, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0, що $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$. За побудовою, для будь-якого $h \succ g_{n_0}$ маємо $|f(g_{n_0}) - f(h)| < \frac{1}{n_0}$. Зокрема, оскільки $g_n \succ g_{n_0}$ для будь-якого $n > n_0$, то одержуємо, що для будь-якого $n > n_0$ і будь-якого $h \succ g_{n_0}$ правильна оцінка

$$|f(g_n) - f(h)| \leqslant |f(g_n) - f(g_{n_0})| + |f(g_{n_0}) - f(h)| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Перейшовши в отриманій нерівності $|f(g_n) - f(h)| < \varepsilon$ до границі при $n \to \infty$, отримаємо, що $|a - f(h)| \leqslant \varepsilon$ для будь-якого $h \succ g_{n_0}$. $\square$

Вправи

19.1. Задамо на $\mathbb{R}$ природну напрямленість: $a \succ b$, якщо $a \geqslant b$. Перевірте, що границя функції за цією напрямленістю збігається з границею при $t \to +\infty$.

19.2. Опишіть інші відомі з курсу аналізу приклади границь $\left(\lim\limits_{t\to-\infty}, \lim\limits_{t\to\infty}, \lim\limits_{t\to a}, \lim\limits_{t\to a-0} \right)$ як границі за відповідними напрямленостями.

19.3. Інтеграл Рімана визначається як границя інтегральних сум. Запишіть цей тип границь також як границю за деякою напрямленістю.

Ще дві вправи

19.4. Нехай $\mathbb{N}_f$ – сім'я всіх скінченних підмножин множини натуральних чисел. Вважатимемо, що скінченна множина A є наступником скінченної множини B, якщо $A \supset B$. Перевірте, що в такому відношенні порядку $\mathbb{N}_f$ – напрямлена множина.

19.5. Нехай (a_n) – довільна числова послідовність. Означимо функцію $s\colon \mathbb{N}_f \to \mathbb{R}$ формулою $s(A) = \sum_{n\in A} a_n$. Доведіть, що у функції s існує границя за напрямленістю $\mathbb{N}_f$ тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно. У цьому випадку $\lim_A s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Протягом цієї лекції (Ω, Σ, μ) буде фіксованим простором зі скінченною мірою, A – вимірною підмножиною в Ω (тобто $A \in \Sigma$). Функції f, f_n, якщо не обумовлено інше, визначені на A і набувають дійсні значення.

Нехай $A \in \Sigma$ – довільна непорожня множина. Розбиттям множини A називається скінченний або зліченний набір D попарно неперетинних непорожніх вимірних підмножин $\Delta_k \subset A$, $k = 1, 2, \ldots$, які дають в об'єднанні все A. Щоб не розглядати щоразу окремо випадки скінченного і зліченного числа елементів у розбитті, надалі записуватимемо розбиття як набори зліченного числа вимірних підмножин, маючи на увазі, що випадок скінченного числа також можливий.

Розбиття $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множини A назвемо допустимим для функції f, якщо для кожного елемента $\Delta_k \in D$ ненульової міри

$$\sup_{t\in\Delta_k} |f(t)| < \infty$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_k} [|f(t)|\,\mu(\Delta_k)] < \infty.$$

За означенням, розбиття $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ є наступником розбиття $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, якщо D_1 є подрібненням розбиття D_2. Іншими словами, $D_1 \succ D_2$, якщо для будь-яких $k, j \in \mathbb{N}$ з того, що Δ_k^1 перетинається з Δ_j^2, випливає, що Δ_k^1 міститься в Δ_j^2.

Теорема 1. Якщо розбиття $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множини A допустиме для функції f, то довільне дрібніше розбиття $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty} \succ D$ також допустиме.

Доведення. Згрупуємо множини Δ_k^1, які потрапляють в один і той самий елемент розбиття D:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_k^1} |f(t_k)|\, \mu(\Delta_k^1) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\Delta_k^1 \subset \Delta_j} \sup_{t \in \Delta_k^1} |f(t)|\, \mu(\Delta_k^1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_j} |f(t)| \sum_{\Delta_k^1 \subset \Delta_j} \mu(\Delta_k^1) = \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_j} |f(t)|\, \mu(\Delta_j) < \infty.$$

Теорему доведено. □

Вправи

19.6. Нехай розбиття D допустиме для функції f, $a \in \mathbb{R}$ – довільний скаляр. Тоді розбиття D допустиме для функції af.

19.7. Нехай розбиття D допустиме для двох функцій f і g. Тоді це розбиття D допустиме для функції $f+g$.

19.8. Для розбиттів $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ множини A такі умови еквівалентні:

(a) $D_1 \succ D_2$;

(b) для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує таке $j \in \mathbb{N}$, що $\Delta_k^1 \subset \Delta_j^2$;

(c) для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ існує така підмножина індексів $A \subset \mathbb{N}$, що $\bigcup\limits_{k \in A} \Delta_k^1 = \Delta_j^2$.

19.9. Нехай $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ і $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ – розбиття множини A. Означимо розбиття D_3, виписавши в послідовність всі непорожні множини вигляду $\Delta_k^1 \cap \Delta_j^2$, $k, j \in \mathbb{N}$. Доведіть, що D_3 є наступником як D_1, так і D_2, тобто сім'я всіх розбиттів множини A утворює напрямленість.

Нехай $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – розбиття множини A. Послідовність $T = \{t_k\}_1^{\infty} \subset \Omega$ називається набором відмічених точок для D, якщо $t_k \in \Delta_k$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Нехай (D_1, T_1) і (D_2, T_2) – розбиття із відповідними наборами відмічених точок. За означенням, пара (D_1, T_1) є наступником пари (D_2, T_2), якщо D_1 – наступник D_2.

Нехай $A \in \Sigma$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ – деяка функція; $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – допустиме розбиття множини A, $T = \{t_k\}_1^{\infty}$ – набір відмічених точок. Інтегральною сумою функції f по множині A, яка відповідає парі (D, T), називається число

$$S_A(f, D, T) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k).$$

Зазначимо, що допустимість розбиття D гарантує абсолютну збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k)$ в означенні інтегральної суми. Ця абсолютна збіжність потрібна для того, щоб інтегральна сума не залежала від того, в якому порядку виписані елементи цього розбиття.

Елементарні властивості, вони ж – вправи

19.10. $S_A(af, D, T) = aS_A(f, D, T)$.

19.11. $S_A(f+g, D, T) = S_A(f, D, T) + S_A(g, D, T)$.

19.12. Якщо $f \geqslant 0$ на множині A, то $S_A(f, D, T) \geqslant 0$.

19.13. Якщо $f \geqslant g$ на множині A, то $S_A(f, D, T) \geqslant S_A(g, D, T)$.

19.14. Якщо на множині A функція f тотожно дорівнює деякій сталій a, то будь-яке розбиття D допустиме для f і

$$S_A(f, D, T) = a\mu(A).$$

19.15. Якщо на множині A виконується оцінка $f \geqslant a$, то

$$S_A(f, D, T) \geqslant a\mu(A).$$

19.16. Якщо на множині A виконується оцінка $f \leqslant b$, то

$$S_A(f, D, T) \leqslant b\mu(A).$$

Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ – деяка функція на вимірній множині A, $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – допустиме розбиття множини A. Верхньою інтегральною сумою функції f за розбиттям D називається число

$$\overline{S}_A(f, D) = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_k} [f(t)\mu(\Delta_k)],$$

а нижньою інтегральною сумою – число

$$\underline{S}_A(f, D) = \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{t \in \Delta_k} [f(t)\mu(\Delta_k)].$$

Надалі при записі верхніх і нижніх інтегральних сум ми враховуватимемо, що доданки, відповідні $\Delta_k \in D$ з $\mu(\Delta_k) = 0$, самі дорівнюють нулеві. Решту ж доданків можна записати у вигляді $\sup\limits_{t \in \Delta_k} f(t)\mu(\Delta_k)$ і $\inf\limits_{t \in \Delta_k} f(t)\mu(\Delta_k)$, бо при цьому вже не може виникнути невизначений вираз вигляду $\infty \cdot 0$.

Лема. Нехай $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – допустиме для функції f розбиття множини A. Тоді

(1) для будь-якого вибору T відмічених точок

$$\underline{S}_A(f, D) \leqslant S_A(f, D, T) \leqslant \bar{S}_A(f, D).$$

(2) Нехай, далі $D_1 \succ D$. Тоді

$$\underline{S}_A(f, D) \leqslant \underline{S}_A(f, D_1) \leqslant \overline{S}_A(f, D_1) \leqslant \overline{S}_A(f, D).$$

(3) Нарешті, $\underline{S}_A(f, D) = \inf_T S_A(f, D, T)$ і $\overline{S}_A(f, D) = \sup_T S_A(f, D, T)$.

Доведення.
(1) Оскільки $t_k \in \Delta_k$, то

$$\inf_{t\in\Delta_k} f(t) \leqslant f(t_k) \leqslant \sup_{t\in\Delta_k} f(t)$$

для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Звідси випливає потрібна оцінка.
(2) Нехай $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$. Згрупуємо множини Δ_k^1, які потрапляють на один і той самий елемент розбиття D :

$$\overline{S}_A(f, D_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j} \sup_{t\in\Delta_k^1} f(t)\mu(\Delta_k^1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_j} f(t) \sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j} \mu(\Delta_k^1) = \overline{S}_A(f, D).$$

Аналогічно перевіряється і нерівність $\underline{S}_A(f, D) \leqslant \underline{S}_A(f, D_1)$.

(3) Щоб довести рівність $\overline{S}_A(f, D) = \sup_T S_A(f, D, T)$, для будь-якого $\delta > 0$ побудуємо такий набір $T_\delta = \{t_k\}_1^\infty$ відмічених точок, що $f(t_k) \geqslant \sup\limits_{t \in \Delta_k} f(t) - \delta$. Маємо

$$S_A(f, D, T_\delta) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_k} [f(t)\mu(\Delta_k)] - \sum_{k=1}^{\infty} \delta\mu(\Delta_k) = \overline{S}_A(f, D) - \delta\mu(A),$$

що через довільність δ доводить потрібне співвідношення. Рівність

$$\underline{S}_A(f, D) = \inf_T S_A(f, D, T)$$

доводиться аналогічно. □