# Теорія міри і інтеграла
# Закінчення Теми 5 “Вимірні функції”
# Початок Теми 6 “Інтеграл Лебега”
## Лекція 18

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

# Зміст лекції

Наближення вимірних функцій неперервними; теорема Лузіна.

Різні методи означення інтеграла Лебега

Напрямленості

Теорема Єгорова. Нехай $f_n \to f$ майже скрізь на $\Omega$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $A = A_\varepsilon \in \Sigma$ з $\mu(A) < \varepsilon$, на доповненні до якої послідовність $(f_n)$ рівномірно збігається до $f$.

Теорема Єгорова. Нехай $f_n \to f$ майже скрізь на $\Omega$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $A = A_\varepsilon \in \Sigma$ з $\mu(A) < \varepsilon$, на доповненні до якої послідовність $(f_n)$ рівномірно збігається до $f$.

Теорема Лузіна. Для будь-якої вимірної за Лебегом функції $f$ на відрізку $[a, b]$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така вимірна множина $A$ з $\lambda(A) < \varepsilon$, що обмеження функції $f$ на $[a, b] \setminus A$ неперервне.

Теорема про м.с.-щільність. Підмножина всіх неперервних функцій м.с.-щільна в просторі всіх вимірних функцій на відрізку.

Доведення. Неперервними функціями можна наблизити характеристичні функції відрізків; лінійними комбінаціями характеристичних функцій відрізків – характеристичні функції відкритих множин; характеристичними функціями відкритих множин – характеристичні функції будь-яких вимірних за Лебегом множин, лінійними комбінаціями характеристичних функцій вимірних множин (тобто скінченнозначними функціями) – прості функції, а простими – будь-які вимірні. □

# Різні методи означення інтеграла Лебега

На дошці

Нагадаємо, що відношення $\succ$ на множині $G$ називається відношенням порядку, якщо воно задовольняє такі умови:

1. $g \succ g$ для будь-якого $g \in G$ (рефлексивність);
2. Якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_1 \succ g_2$, то $g_1 = g_2$ (антисиметричність);
3. Якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_3 \succ g_2$, то $g_3 \succ g_1$ (транзитивність).

Множина $G$ із введеним на ній бінарним відношенням $\succ$ називається напрямленою множиною або напрямленістю, якщо

(a) $g \succ g$ для будь-якого $g \in G$;

(b) якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_3 \succ g_2$, то $g_3 \succ g_1$;

(c) для будь-яких двох елементів $g_1, g_2 \in G$ існує елемент $g_3$, що є наступним за обома: $g_3 \succ g_1$ і $g_3 \succ g_2$.

Зазначимо, що часто в означенні напрямленої множини вимагають, щоб відношення $\succ$ було відношенням порядку, в нашому ж означенні напрямленість може не підпорядковуватись аксіомі 2 відношення порядку.

# Вправи

У яких із перелічених нижче прикладів відношення $\succ$ на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел є відношенням порядку? В яких прикладах $(\mathbb{Z}, \succ)$ — напрямлена множина?

18.1. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 > n_2$.

18.2. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 \geqslant n_2$.

18.3. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 \leqslant n_2$.

18.4. $n_1 \succ n_2$, якщо $|n_1| \geqslant |n_2|$.

18.5. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 \geqslant n_2$ і $n_1 - n_2$ ділиться без остачі на 2.

Нехай $(G, \succ)$ — напрямлена множина. Назвемо елементи $g_1, g_2 \in G$ еквівалентними $(g_1 \sim g_2)$, якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_1 \succ g_2$.

18.6. Перевірте, що відношення «$\sim$» є відношенням еквівалентності.