Теорія міри і інтеграла
Тема 5: Вимірні функції
Лекція 16

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

(Ω, Σ, μ) – повний простір з мірою, f, g – функції на Ω, $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$ і f вимірна. Тоді g також вимірна.

(Це було дуже швидко наприкінці попередньої лекції. Зараз надамо елегантніше доведення, розбивши це твердження на 2 частини).

Теорема 1. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою, (Ω, Σ', μ) – його поповнення. Тоді для будь-якої функції f на Ω, вимірної щодо σ-алгебри Σ', існує Σ-вимірна функція g, яка збігається з f майже скрізь.

Доведення. Спочатку доведемо це твердження для простої функції. Нехай $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$, $A_n \in \Sigma'$ і диз'юнктні. У кожному з A_n виберемо по підмножині $B_n \in \Sigma$, з $\mu(A_n \setminus B_n) = 0$. Тоді $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{B_n}$ – шукана функція. Тепер нехай f – довільна Σ'-вимірна функція, (f_n) – послідовність простих Σ'-вимірних функцій, поточково збіжна до f, g_n – Σ-вимірні функції, які майже скрізь збігаються з відповідними f_n. Нехай $A \subset \Omega$ – та нехтувана множина, зовні якої $f_n = g_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Згідно з означенням нехтуваної множини, існує Σ-вимірна множина B нульової міри, яка містить A.

Розглянемо множину повної міри $C = \Omega \setminus B$. Функції $g_n \cdot \mathbb{1}_C$ утворюють послідовність Σ-вимірних функцій, збіжну на C до f, які за межами множини C дорівнюють 0. Тобто $g_n \cdot \mathbb{1}_C$ прямують поточково до функції $g = f \cdot \mathbb{1}_C$, і ця гранична функція Σ-вимірна. Залишається зауважити, що $g = f$ майже скрізь, оскільки множина B, де ця рівність може не виконуватись, нехтувана. □

Послідовність функцій (f_n) називається збіжною майже скрізь до функції f (позначення: $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$), якщо множина тих $t \in \Omega$, де $f_n(t)$ не прямує до $f(t)$ при $n \to \infty$, нехтувана. Зазначимо найпростіші властивості збіжності майже скрізь, перевірку яких залишаємо читачеві як вправу.

A. Якщо $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$ і $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} g$, то $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$.
B. Якщо $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$ і $f_n \overset{\text{м.с.}}{=} g_n$, то $g_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$.
C. Якщо $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{м.с.}} g$ і $f_n \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} g_n$, то $f \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} g$.
D. Якщо $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{м.с.}} g$, то $G(f_n, g_n) \xrightarrow{\text{м.с.}} G(f, g)$. Звідси випливають, зокрема, теореми про границю суми і добутку.

Збіжність майже скрізь відіграє важливу роль у теорії інтеграла Лебега. За відносно необтяжливих додаткових припущень інтеграл граничної функції можна обчислювати як границю інтегралів. При цьому збіжність майже скрізь значно зручніша у багатьох відношеннях від звичайної поточкової збіжності. По-перше, це загальніший вид збіжності, тому таку збіжність легше перевіряти. Далі, тут, як і взагалі при роботі з властивостями, які виконуються майже скрізь, можна не звертати увагу на поведінку функції на нехтуваних множинах. Скажімо, для кусково-неперервної або для монотонної функції можна взагалі не означати значень в точках розриву – на збіжності майже скрізь це ніяк не позначиться! Проте у збіжності майже скрізь є один істотний недолік: ця збіжність не породжується жодною метрикою чи топологією, і тому немає природного способу означити «швидкість збіжності». Наведемо приклад задачі, де наявний цей недолік.

Означення. Нехай X, Y – дві сім'ї вимірних функцій на Ω. Будемо говорити, що X м.с.-щільна в Y (щільна в сенсі збіжності майже скрізь), якщо для будь-якого $f \in Y$ існує така послідовність (f_n) елементів сім'ї X, що $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$.

Теорема. Нехай X м.с.-щільна в Y, Y м.с.-щільна в Z, тоді X м.с.-щільна в Z.

Ця природна властивість важлива не тільки з точки зору внутрішньої стрункості теорії збіжності майже скрізь, але й з точки зору застосувань. Так, на ній базується вивід м.с.-щільності сім'ї неперервних функцій на відрізку в множині всіх вимірних за Лебегом функцій на тому ж відрізку. Хоча ці результати і можна довести, спираючись лише на означення збіжності майже скрізь, придумати такі доведення зовсім не просто (пропонуємо читачеві спробувати свої сили). От якщо б збіжність задавалась деякою топологією, задача була б тривіальною, але на жаль, такої топології не існує.

На щастя, існує топологія на просторі вимірних функцій, для якої поняття щільності підмножини еквівалентне м.с.-щільності, хоча збіжність (так звана збіжність за мірою) і не еквівалентна збіжності майже скрізь. До вивчення цієї топології та відповідної збіжності ми переходимо зараз.

Нехай a і ε – строго додатні числа, f – вимірна функція. Через $U_{a,\varepsilon}(f)$ позначимо сім'ю тих вимірних функцій g, для яких $\mu\left(|g - f|_{>a}\right) < \varepsilon$. Топологією збіжності за мірою на просторі всіх вимірних функцій на Ω називається топологія, в якої базу околів кожної функції f утворюють множини $U_{a,\varepsilon}(f)$, $a, \varepsilon > 0$. Відповідно, послідовність функцій (f_n) називається збіжною за мірою до функції f (позначення: $f_n \xrightarrow{\mu} f$), якщо для будь-якого $a > 0$

$$\mu\left(|f_n - f|_{>a}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теорема 2. Збіжність за мірою має такі властивості:

A. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ тоді і тільки тоді, коли $f_n - f \xrightarrow{\mu} 0$.

B. Якщо $f_n \xrightarrow{\mu} f$ і $f_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$.

C. Якщо $f_n \xrightarrow{\mu} f$ і $f_n \overset{\text{м.с.}}{=} g_n$, то $g_n \xrightarrow{\mu} f$.

Доведення. Перша і третя властивості очевидні. Доведемо другу властивість. Нехай A – це множина тих $t \in \Omega$, де $f(t) \neq g(t)$, а A_n – множина тих $t \in \Omega$, де $|f(t) - g(t)| > \frac{1}{n}$. Оскільки $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, нам достатньо довести, що $\mu(A_n) = 0$ при всіх n. Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ в кожній точці $t \in A_n$ чи $|f(t) - f_k(t)| > \frac{1}{2n}$, чи $|g(t) - f_k(t)| > \frac{1}{2n}$. Отже, якщо множину точок, де $|f(t) - f_k(t)| > \frac{1}{2n}$ позначити через $B_{n,k}$, а точок, де $|g(t) - f_k(t)| > \frac{1}{2n}$ – через $C_{n,k}$, то $A_n \subset B_{n,k} \cup C_{n,k}$. За означенням збіжності за мірою, при фіксованому n і $k \to \infty$ міри множин $B_{n,k}$ і $C_{n,k}$ прямують до 0. Отже, $\mu(A_n)$ може бути лише нульовою. $\square$

Теорема 3. Нехай X – деяка сім'я вимірних функцій на Ω. Тоді кожна точка замикання множини X в топології збіжності за мірою буде границею деякої збіжної за мірою послідовності елементів множини X.

Доведення. Нехай f – точка замикання множини X. Зазначимо, що окіл $U_{a,\varepsilon}(f)$ збільшується як із зростанням a, так і зі зростанням ε. Розглянемо окіл $U_n = U_{1/n,1/n}(f)$. Зрозуміло, що $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ і околи U_n утворюють в сукупності базу околів для f (якщо $U_{a,\varepsilon}(f)$ – довільний окіл функції f, то $U_{a,\varepsilon}(f) \supset U_n$ при $n > \max\{1/a, 1/\varepsilon\}$). За означенням замикання, всі множини $X \cap U_n$ непорожні. Виокремимо в кожній з $X \cap U_n$ по елементу f_n. Послідовність (f_n) і є потрібною послідовністю елементів множини X, збіжною до f за мірою. $\square$

Ковзаючий пагорб. Виділимо на відрізку $[0,1]$ підвідрізки $\mathrm{I}_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, 2^n$. При фіксованому n відрізки $\mathrm{I}_{n,k}$, $k = 1, ..., 2^n$, покривають увесь відрізок $[0,1]$. Розглянемо таку послідовність функцій: $f_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $f_2 = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$, $f_3 = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$, ... , $f_{2^n+k} = \mathbb{1}_{\mathrm{I}_{n,k}}$, ... Для будь-якого $a > 0$ множина точок відрізка, де $|f_{2^n+k}|$ більше за a, або порожня (якщо $a \geqslant 1$), або збігається з $\mathrm{I}_{n,k}$. Оскільки довжини відрізків $\mathrm{I}_{n,k}$ прямують до нуля при $k \to \infty$, послідовність (f_n) прямує до нуля за мірою (в сенсі міри Лебега). Водночас послідовність (f_n) не прямує до нуля в жодній точці, оскільки кожна точка відрізка $[0,1]$ належить до нескінченної кількості відрізків $\mathrm{I}_{n,k}$. Цей приклад, з одного боку, дозволяє відчути сенс збіжності за мірою, а з іншого – доводить, що збіжність за мірою не еквівалентна збіжності майже скрізь.

Вправи

Вираз

$$\rho(f, g) = \inf_{a \in (0,+\infty)} \{a + \mu(|f - g|_{>a})\}$$

– це псевдометрика, яка задає топологію збіжності за мірою.

Інший приклад: псевдометрика

$$d(f, g) = \inf\{a > 0 : \mu(|f - g|_{>a}) \leqslant a\}$$

також задає топологію збіжності за мірою.