Теорія міри і інтеграла
Тема 5: Вимірні функції
Лекція 15

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

У цій темі (Ω, Σ) – множина і задана на ній σ-алгебра. Всі функції, якщо не обумовлене протилежне, вважаються визначеними на Ω; елементи σ-алгебри Σ називаються вимірними підмножинами.

Функція f на Ω називається вимірною (детальніше: вимірною по відношенню до σ-алгебри Σ), якщо для будь-якої борелевої підмножини A в $\mathbb{R}$ множина $f^{-1}(A)$ вимірна.

Критерій вимірності. Функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна тоді і тільки тоді, коли всі множини $f_{>a}$, $a \in \mathbb{R}$, вимірні.

Приклад.
Нехай $A \subset \Omega$. Характеристичною функцією множини A називається функція $\mathbb{1}_A$ на Ω, яка дорівнює 1 на A і нулю зовні множини A. Функція $\mathbb{1}_A$ буде вимірною тоді і тільки тоді, коли вимірна множина A.

Елементарні властивості вимірних функцій

1. Якщо $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна, а $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна, то $g \circ f$ вимірна.
2. Нехай функція $f_1, f_2\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірні, а функція двох змінних $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді функція $f(t) = g(f_1(t), f_2(t))$ вимірна.

Теорема Клас вимірних функцій на (Ω, Σ) має такі властивості: якщо функції f і g вимірні, то вимірними є функції $f+g$, fg, $\max\{f, g\}$, і $\min\{f, g\}$. Також вимірні функції $|f|$, $\operatorname{sign} f$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = (-f)^+$ і λf при будь-якому $\lambda \in \mathbb{R}$. Якщо f ніде не перетворюється в нуль, то вимірною є функція $1/f$.

Теорема 1. Нехай послідовність (f_n) вимірних функцій збігається поточково до функції f, тобто $\forall t \in \Omega$

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t).$$

Тоді f – вимірна функція.

Доведення. Зафіксуємо число $a \in \mathbb{R}$. Значення функції f в точці $t \in \Omega$ буде більшим за a тоді і тільки тоді, коли існують таке раціональне число $r \in \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ і такий номер $n \in \mathbb{N}$, що для будь-якого $m > n$ правильна нерівність $f_m(t) > a + r$. Перекладаючи це твердження на мову теорії множин, одержуємо, що

$$f_{>a} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n+1}^{\infty} (f_m)_{>a+r} \in \Sigma. \qquad \square$$

Застосувавши останню теорему до послідовності частинних сум ряду, отримуємо такий наслідок.

Наслідок. Якщо ряд з вимірних функцій збігається поточково, то його сума – вимірна функція.

Вправи

15.1. Наведіть приклад розривної вимірної за Борелем функції на $\mathbb{R}$.

15.2. Будь-яка монотонна функція на осі вимірна за Борелем.

15.3. Нехай f – вимірна функція на Ω. Тоді f вимірна на кожній підмножині $A \in \Sigma$.

15.4. Нехай Ω зображується у вигляді об'єднання своїх вимірних підмножин A і B; функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна як на A, так і на B. Тоді f вимірна на Ω.

Функція f на Ω називається простою функцією, якщо вона зображується у вигляді $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$, де $A_n \in \Sigma$ – диз'юнктна послідовність множин, а a_n – числа. З огляду на диз'юнктність множин A_n ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$ не просто збігається поточково, а більше того, для будь-якого $t \in \Omega$ всі доданки вказаного ряду дорівнюють нулю, за винятком, можливо, одного (з тим номером n, для якого $t \in A_n$). На кожній з множин A_n функція f дорівнює сталій a_n, і $f(t) = 0$ за межами об'єднання всіх A_n. Прості функції ще називають зліченнозначними функціями, або, більш детально, зліченнозначними вимірними функціями. Обґрунтуванням цього терміну є таке твердження.

Теорема 2. Функція f є простою функцією тоді і тільки тоді, коли f вимірна і множина всіх її значень не більш ніж злічена.

Доведення. Вимірність простої функції $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$ можна перевірити безпосередньо (прообразом будь-якої множини є скінченне або злічене об'єднання деяких з A_n), а можна зіслатись на вимірність суми ряду вимірних функцій. Далі, $f(\Omega) \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$, звідки випливає не більш ніж зліченність множини всіх значень функції.

Навпаки, нехай f вимірна і множина M всіх її значень не більш ніж злічена. Тоді для будь-якого $t \in M$ множина $f^{-1}(t)$ вимірна і $f = \sum\limits_{t \in M} t \mathbb{1}_{f^{-1}(t)}$. □

Якщо множина значень простої функції скінченна, функція називається скінченнозначною функцією.

Теорема 3. Класи скінченнозначних і зліченнозначних функцій стійкі щодо операцій суми, добутку, взяття максимуму і мінімуму двох функцій.
Доведення. Те, що ці операції зберігають вимірність, нам вже відомо. Нехай тепер f і g – дві функції на Ω, M і N – їх множини значень. Якщо M і N скінченні, то множини $M + N = \{t + r : t \in M, r \in N\}$ і $M \cdot N = \{t \cdot r : t \in M, r \in N\}$ скінченні, якщо зліченні, то – зліченні. Твердження теореми випливає з того, що образи функцій $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ і $\min\{f, g\}$ лежать в $M + N$, $M \cdot N$, $M \cup N$ і $M \cup N$ відповідно. $\square$

Вимірні функції можуть бути влаштовані досить складно. Тому для полегшення досліджень їх структури використовують наближення вимірної функції простими.

Теорема 4. Нехай f – вимірна функція на Ω. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує проста функція $f_\varepsilon \leqslant f$, яка у всіх точках відрізняється від f не більше ніж на ε. При цьому якщо $f \geqslant 0$, то f_ε також можна вибрати невід'ємною, а якщо f обмежена, то за f_ε можна вибрати скінченнозначну функцію.

Доведення. Для будь-якого цілого n означимо числа $t_n = n\varepsilon$ і відрізки $\Delta_n = [t_n, t_{n+1})$. Через A_n позначимо $f^{-1}(\Delta_n)$. Деякі з A_n можуть бути порожніми. Зокрема, якщо $f \geqslant 0$, то порожніми будуть всі A_n з номерами, меншими за нуль. Якщо ж f обмежена за модулем деякою сталою C, то всі A_n з $|n| > \frac{C}{\varepsilon} + 1$ будуть порожніми.

Множини A_n попарно не перетинаються, в об'єднанні дають всю множину Ω, і на A_n значення функції f задовольняють нерівності $t_n \leqslant f(t) < t_{n+1}$. Функцію f_ε означимо так, щоб на A_n вона дорівнювала відповідному t_n:

$$f_\varepsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n \mathbb{1}_{A_n}.$$

Така функція буде задовольняти всі умови теореми. Так, на кожному з A_n правильна оцінка

$$t_n = f_\varepsilon(t) \leqslant f(t) < t_{n+1},$$

тобто $f(t) - \varepsilon < f_\varepsilon(t) \leqslant f(t)$ в кожній точці $t \in \Omega$. Якщо $f \geqslant 0$, то функція f_ε не прийматиме від'ємних значень t_n: множини A_n, які відповідають від'ємним t_n, будуть порожніми. Якщо ж f обмежена, то порожніми будуть всі A_n, за винятком скінченного числа, і f_ε буде скінченнозначною. $\square$

Наслідок. Для будь-якої вимірної функції f існує неспадна послідовність $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ простих функцій, рівномірно збіжна до f. При цьому якщо f невід'ємна (обмежена), то f_n можна вибрати невід'ємними (скінченнозначними).

Доведення. Виберемо просту функцію f_1 так, щоб вона підпорядковувалась умові $0 \leqslant f - f_1 \leqslant 1$. Функція $f - f_1$ – вимірна невід'ємна функція, і, за попередньою теоремою, існує проста функція $g_1 \geqslant 0$, яка задовольняє нерівність $0 \leqslant f - f_1 - g_1 \leqslant 1/2$. Покладемо $f_2 = f_1 + g_1$. Маємо $f_1 \leqslant f_2$ і $0 \leqslant f - f_2 \leqslant 1/2$. Функція $f - f_2$ знову – вимірна невід'ємна функція, і знову її можна наблизити деякою простою функцією $g_2 \geqslant 0$: $0 \leqslant f - f_2 - g_2 \leqslant 1/3$. Функцію f_3 означимо як $f_2 + g_2$.
Продовживши цей процес, отримаємо зростаючу послідовність простих функцій з умовою $0 \leqslant f - f_n \leqslant 1/n$, яка забезпечує рівномірну збіжність. Задовольнити додаткові вимоги невід'ємності чи скінченнозначності, вказані у формулюванні наслідку, також нескладно. □

(Ω, Σ, μ) – повний простір з мірою, f, g – функції на Ω, $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$ і f вимірна. Тоді g також вимірна.
(на дошці)