Функціональний аналіз II
Тема 2. Базис Шаудера
Лекції 9-10

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Послідовність $\{e_n\}_1^\infty$ елементів банахового простору X називається базисом (або, що те саме, базисом Шаудера) в X, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ існує єдина послідовність коефіцієнтів $\{a_n\}_1^\infty$, для яких ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ збігається до x. Ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ називається розкладом елемента x за базисом $\{e_n\}_1^\infty$, а числа $\{a_n\}_1^\infty$ називаються коефіцієнтами розкладу.

Твердження 1. Елементи базису лінійно незалежні між собою. Зокрема, елемент базису не може дорівнювати нулю.

Твердження 2. Базис $\{e_n\}_1^\infty$ банахового простору X – це повна в X множина: $\overline{\mathrm{Lin}}\,\{e_n\}_1^\infty = X$.

Твердження 3. Якщо банахів простір X має базис Шаудера, то X нескінченновимірний і сепарабельний.

Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – базис банахового простору X, $x \in X$. Позначимо через $e_n^*(x)$ коефіцієнти розкладу елемента x за базисом $\{e_n\}_1^\infty$, а через $S_n(x)$ – частинні суми цього розкладу:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)\, e_k.$$

Твердження 5. e_n^* – лінійні функціонали на X, а S_n – лінійні оператори, які діють з X в X.

Надалі функціонали e_n^* ми називатимемо координатними функціоналами, а оператори S_n – операторами частинних сум за базисом $\{e_n\}_1^\infty$.

Теорема 1. (С. Банах). Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – базис банахового простору X. Тоді оператори S_n частинних сум і координатні функціонали e_n^* неперервні,

$$\sup_n \{\|e_n\| \cdot \|e_n^*\|\} < \infty \quad \text{і} \quad \sup_n \|S_n\| < \infty.$$

Базисна константа. Монотонні базиси.
Критерій базиса. Приклади базисів у просторах функцій.

Нехай X – банахів простір з базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Тоді будь-який лінійний функціонал $f \in X^*$ однозначно визначається своїми значеннями на елементах базису. Іншими словами, кожен функціонал f можна ототожнити з числовою послідовністю $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n), ...)$, а простір X^* – із множинами всіх таких числових послідовностей. Більш строго цей факт сформульовано в теоремі.

Теорема 2. Для будь-якого $f \in X^*$ введемо позначення $Uf = (f(e_1),\ f(e_2), ..., f(e_n), ...)$. Позначимо через $\widetilde{X}$ множину всіх числових послідовностей вигляду Uf, $f \in X^*$. Тоді $\widetilde{X}$ – лінійний простір щодо покоординатних операцій, а U – бієктивне лінійне відображення простору X^* на простір $\widetilde{X}$. Далі, нехай $f \in X^*$, $Uf = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$. Тоді для будь-якого $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \in X$ дію функціонала f на елемент x можна обчислити за правилом $f(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n f_n$. $\square$

Теорема 3. Нехай $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$ – послідовність чисел. Введемо позначення

$$\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \right| : N \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| \leqslant 1 \right\}.$$

Для того, щоб послідовність чисел $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$ належала до простору $\widetilde{X}$, необхідно і досить, щоб величина $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$ була скінченною. При цьому якщо $f \in X^*$ – функціонал, що породжує послідовність $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$, то

$$\|f\| = \|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}.$$

Доведення. Підпростір (незамкнений) $Y = \mathrm{Lin}\,\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ щільний в X.

Умова $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} < \infty$ еквівалентна неперервності лінійного функціоналу $\tilde{f}$, заданого на Y рівністю

$$\tilde{f}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n. \tag{2}$$

При цьому $\|\tilde{f}\| = \|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$. Оскільки будь-який неперервний лінійний функціонал, заданий на Y, продовжується за неперервністю єдиним способом на весь X, то це еквівалентно існуванню функціонала $f \in X^*$, який діє на лінійні комбінації векторів базису за правилом (2).
Оскільки при цьому $Uf = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$, остання умова еквівалентна тому, що $(f_1, f_2, ..., f_n, ...) \in \widetilde{X}$. Нарешті, рівність $\|f\| = \|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$ означає просто, що норма обмеження функціонала $f \in X^*$ на щільний підпростір Y – величина $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$ – збігається з $\|f\|$. $\square$

Приклад 1. Розглянемо $X = c_0$ з канонічним базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Тоді

$$\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|,$$

і, отже, $\widetilde{X}$ збігається з ℓ_1. Справді, умова $\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| \leqslant 1$ в цьому випадку означає просто, що $|a_n| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots, n$. За такої умови найбільше можливе значення величини $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right|$ – це $\sum_{n=1}^{N} |f_n|$ (це значення досягається при $a_n = \operatorname{sign} f_n$). Маємо

$$\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right| : N \in \mathbb{N}, \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| \leqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{n=1}^{N} |f_n| : N \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|.$$

Враховуючи те, що за теоремою 3, простір $\widetilde{X}$ можна ототожнити зі спряженим простором, останній приклад скорочено записують у вигляді рівності $(c_0)^* = \ell_1$. Детально цей запис розшифровується як

Теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в c_0: кожен елемент $(f_1, f_2, \ldots)$ простору ℓ_1 породжує неперервний лінійний функціонал

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$$

на c_0, і норма функціонала f збігається з нормою елемента $(f_1, f_2, \ldots)$ в ℓ_1. Навпаки, кожен функціонал $f \in (c_0)^*$ породжується деяким елементом $(f_1, f_2, \ldots)$ простору ℓ_1 за описаним вище правилом, причому елемент $(f_1, f_2, \ldots)$ визначається за функціоналом f однозначно.

Приклад 2. Нехай $X = \ell_1$ з канонічним базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Тоді $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$, і, отже, простір $\widetilde{X}$ збігається з ℓ_∞. Іншими словами, $(\ell_1)^* = \ell_\infty$.

Справді, в цьому випадку, якщо $\left\|\sum_{n=1}^N a_n e_n\right\| \leqslant 1$, то $\sum_{n=1}^N |a_n| \leqslant 1$, і $\left|\sum_{n=1}^N a_n f_n\right| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$. Відповідно,

$$\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| .$$

З іншого боку, підставивши в означення норми на просторі $\widetilde{X}$ замість лінійної комбінації $\sum\limits_{n=1}^N a_n e_n$ один базисний вектор e_n, одержимо оцінку $\|(f_1, f_2, ...)\|_{\widetilde{X}} \geqslant |f_n|$. Перейшовши до супремума за n, отримуємо нерівність $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} \geqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$.

Нехай $1 < p < \infty$, p' – спряжений показник: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Вправа 5.1. Використовуючи нерівність Гельдера для скінченних сум

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n|^{p'}\right)^{1/p'},$$

виведіть теорему про загальний вигляд лінійного функціонала в ℓ_p, $1 < p < \infty$: $(\ell_p)^* = \ell_{p'}$.

Вправа 5.2. Доведіть повноту просторів ℓ_p при $1 < p < \infty$, спираючись на результат попередньої вправи.

Вправа 5.3. Як ми вже зазначали, канонічний базис простору ℓ_∞ не буде базисом цього простору. Відповідно, для ℓ_∞ ми не можемо користуватись описом функціоналів у просторі з базисом. Доведіть, що існує функціонал $f \in (\ell_\infty)^*$, який не можна зобразити у вигляді $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ «скалярного множення» на фіксовану числову послідовність.