

Упр. Как они изменяются при замене координат?

Рем. $\nabla_X \beta$ "тензорно" по X , т.е. линейно относительно умножения на функции. А по тензорным полям можно показать, что

$\forall p \in M$ можно определить связность в точке p

$\nabla : T_p M \times \mathcal{X}_E(M) \rightarrow \mathcal{X}^{-1}(p) : v, \beta \mapsto \nabla_v \beta$ так, что если $v = X_p$, то $\nabla_v \beta = (\nabla_X \beta)_p$ (и наоборот, "поле связностей" во всех точках M с зад. условием гладкости даёт связность

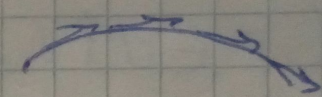
(Упр.) При этом $\nabla_{\lambda v + \mu w} \beta = \lambda \nabla_v \beta + \mu \nabla_w \beta$, $\nabla_v(\beta + t) = \nabla_v \beta + \nabla_v t$, $\nabla_v(f\beta) = v(f)\beta_p + f(p)\nabla_v \beta \forall v, w, \beta, t, f, g \in$

def. Сечением E вдоль кривой $\gamma \in C^\infty(I, M)$ будем называть $\beta \in C^\infty(I, E) : \forall t \in I \quad \beta(t) \in \mathcal{X}_{-1}(\gamma(t))$.

Ex. Для TM это векторное поле вдоль кривой.

Рем. $\forall$ кривая $\beta \in C^\infty(I, E)$ — сечение вдоль

$\pi \circ \gamma \in C^\infty(I, M)$, т.е. γ уже содержит в себе информацию о γ . Поэтому можем говорить просто о кривых в E .

Ex. Если γ -кривая в M (т.е.), то γ' - в TM . 

Рл. Пусть ∇ -связность на E , $\forall$ сечения γ вдоль $\gamma \in C^\infty(I, M)$ $\exists!$ сечение $\nabla_\gamma \gamma$ вдоль

γ : $\forall$ поля $X \in \mathcal{X}(M)$ и сечения $t \in \mathcal{X}_E(M)$ или $\forall \tau \in I$

$\gamma'(\tau) = X_{\gamma(\tau)}$ и $\gamma(\tau) = t_{\gamma(\tau)}$, то $\nabla_{\gamma'} \gamma(\tau) = (\nabla_X t)_{\gamma(\tau)}$

(т.е. если X и t продолжатся от γ' и γ соотв., то

$\nabla_X t$ продолжится $\nabla_{\gamma'} \gamma$),

►! Пусть в лок. коорд. $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $t = t^a e_a$,

$\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, $\gamma(\tau) = \gamma^a(\tau)(e_a)_{\gamma(\tau)}$. Условия продол-

жения: $\forall \tau$ $X^i(\gamma^1(\tau), \dots, \gamma^n(\tau)) = (\gamma^i)'(\tau)$, $t^a(\gamma^1(\tau), \dots, \gamma^n(\tau)) =$

$= \gamma^a(\tau)$; $\nabla_X t = X^i \frac{\partial t^a}{\partial x^i} e_a + X^i t^a \Gamma_{ia}^b e_b$, где

$\{\Gamma_{ia}^b\}$ - символы К. данной св-ти ∇ в этих коорд.

В точке $\gamma(T)$: $(\gamma'(T), \dots, \gamma^n(T))$

$$(\nabla_X t)_{\gamma(T)} = (\gamma^i)'(T) \frac{\partial t^a}{\partial x^i} e_a + (\gamma^i)'(T) \gamma^a(T) \Gamma_{ia}^b(\gamma'(T), \dots, \gamma^n(T)) e_b$$

Первое слагаемое равно $\frac{d}{dT} (t^a(\gamma'(T), \dots, \gamma^n(T))) e_a = \frac{d\gamma^a}{dT} e_a$.

В этой сумме не осталось X и t , только γ и γ (и связность). Т.е. если ∇ из условия $\exists$, оно однозначно определяется ф-лой:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma = (\gamma^a)' e_a + (\gamma^i)' \gamma^a (\Gamma_{ia}^b \circ \gamma) e_b \quad (*)$$

e_a тут можно везде на самом деле $e_a \circ \gamma$

$\exists \forall \epsilon \in I$ выберем в окр-ти $U \ni \gamma(\epsilon)$ карту с лок.

коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ и соотв. базисом слоев $\{e_1, \dots, e_m\}$.

Определим $\nabla_{\gamma'} \gamma|_{\gamma^{-1}(u)}$ ф-лой $(*)$. Нужно проверить, что она инвариантна отл. выбора координат.

Упр. Проверить, что это корректно определенное сечение вдоль γ , используя упр. про изменение символов К.

Рассуждение в гом-ве ! также показывает, что это сечение удовл. условию. $\triangleleft$ Рем. из св-ва $\nabla: \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
 $\nabla_X(\varphi Z) = \underbrace{X'(\varphi)}_{\text{матрица } \varphi'} Z + \varphi \nabla_X Z$ (для $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$)
лев. сечение Z вдоль X наз. параллельным (а соотв. кривая $Z: I \rightarrow E$ — горизонтальной), если $\nabla_X Z = 0$.

Рл. Для кривой $X: I \rightarrow M$ $\forall T_0 \in I$ $\forall Z_0 \in \pi^{-1}(X(T_0))$
 $\exists!$ сечение Z вдоль $X: \nabla_X Z = 0$ и $Z(T_0) = Z_0$.

Рем. экв-но: $\forall X: I \rightarrow M, T_0 \in I, Z_0 \in \pi^{-1}(X(T_0)) \exists!$ ~~горизонтальная~~ кривая $Z: I \rightarrow E: Z(T_0) = Z_0, \pi \circ Z = X$
 (горизонтальное поднятие X).

$\Rightarrow \forall T \in I$: пусть $T \geq T_0$ (для $T \leq T_0$ ана-но). Используя лемму Лебега, разделим $[T_0, T]$: $T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_k = T$:
 $\forall i = 1, \dots, k \quad X([T_{i-1}, T_i]) \subset U_i$ — носитель карты M .

Пусть на U_i $(x^1, \dots, x^n)$ — лок. коорд., $\{e_1, \dots, e_m\}$ — базис сдв-в.

Параметры γ с $\gamma(T_0) = \gamma_0$ (если $\gamma = \gamma^a e_a$ и $\gamma_0 = \gamma_0^a e_a$) |
 определяется условиями:

$$\begin{cases} (\gamma^b)' + (\gamma^i)' \gamma^a \Gamma_{ia}^b \gamma = 0 \\ \gamma^a(T_0) = \gamma_0^a \end{cases}, \quad \begin{matrix} b = \overline{1, m} \\ a = \overline{1, m} \end{matrix}$$

где Γ_{ia}^b - симв. Кр. ∇ , $(\gamma^1, \dots, \gamma^m)$ - лок. задание γ .

Это задача Коши для линейной системы ОДУ I порядка с заданными начальными $\Rightarrow$ у нее $\exists!$ решение на всем промежутке $[T_0, T_1]$. В ч-ти, определено $\gamma_1 = \gamma(T_1)$.

Далее решаем ту же задачу на $[T_1, T_2]$ в соотв. коорд.

и с условием $\gamma(T_1) = \gamma_1$ и т.д. Получаем однозначно

опр. γ в $\forall T \in I \leftarrow \Delta$ (заданность в T_i получаем, решая эту задачу в окр-ти T_i и используя однозначность)

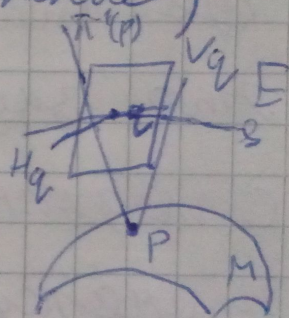
Ес для плоской в-сти $\gamma^a = \gamma_0^a$ ~~и т.д.~~, т.е.

в случае $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ это просто $\gamma = \gamma_0$ (по кривая

не постоянна, т.к. эти z_0 - в разных точках).

Рем. П.к. $\pi: E \rightarrow M$ - субмерсия, то $T\pi$ отображает рес. значения $\forall p \in M$ $\pi^{-1}(p)$ (слой, который мы отождествляем с $\mathbb{R}^n$) - в линейное подпространство в E размерности $n+m-n=m$.

$\forall q \in \pi^{-1}(p) \forall v := T_q \pi^{-1}(p) \subset T_q E$ (используем отождествление) назовём вертикальным подпр-м в q . Если $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$ - лок. коорд. в окр-ти q карты вида $(\pi^{-1}(u_\alpha), \chi_\alpha)$, то $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^a} \right\}_{a=1}^m$ - базис этого



подпр-ва. Для кривой $z: \bar{I} \rightarrow E$ с лок. заданием $(x^1, \dots, x^n, z^1, \dots, z^m)$ условия горизонтальности $(z^b)' + (x^i)' z^a \Gamma_{ia}^b(x^1, \dots, x^n) = 0, b = \overline{1, m}$

означают принадлежность вектора $z'(t)$ подпр-ву $T_{z(t)} \pi^{-1}(p)$, определённый как н-тво нулей формы

$$\theta^b := dy^b + \Gamma_{ia}^b(x^1, \dots, x^n) y^a dx^i, \quad b = \overline{1, m}$$

Это подгр-ва $H_q \subset T_q E$ определено $\forall q \in E$ формами $\{\theta^b \in \mathcal{X}(E)^*\}_{b=1}^m$ (можно проверить, что они определены корректно ал-по док-ву предыдущего Рл.). Оно n -мерно и трансверсально (т.е. дополнено: $T_q E = H_q \oplus V_q$) V_q . Будем называть такие подгр-ва горизонтальными. Они определяются связностью (т.е. определяется отображение $q \mapsto H_q$, т.н. распределение на E). Можно показать, что выбор распределения $q \mapsto H_q$, трансверсального V_q и заданной задних форм $\theta^1, \dots, \theta^m$, наоборот, однозначно определяет ~~связность~~ связность: ал-по док-ву пред. Рл. показывается, что $\forall \gamma: I \rightarrow M$, $\exists \gamma_0 \in I$ и $\exists \gamma_0 \in I$ $\exists! \gamma: I \rightarrow M$: $\pi \circ \gamma = \gamma$, $\gamma(\gamma_0) = \gamma_0$ и она горизонтальная (т.е. $\gamma'(\tau) \in H_{\gamma(\tau)} \forall \tau$); и $\forall p \in M, v \in T_p M, \gamma \in \mathcal{X}_E(M)$

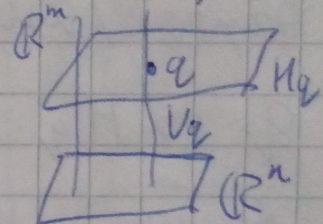
пусть $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ — канонич. кривая с $\gamma(0) = p$,
 $\gamma'(0) = v$, $\bar{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E$ — её возмущ. подмногообразие с $\bar{\gamma}(0) = s_p$.

Определим $\nabla_v s := \lim_{T \rightarrow 0} \frac{s(\gamma(T)) - \bar{s}(T)}{T} \in \pi^{-1}(\gamma(T))$

(это независимо от γ),
 $\nabla_v s \in \pi^{-1}(p)$. Наконец, для $X \in \mathcal{X}(M)$ $(\nabla_X s)_p := \nabla_{X_p} s$.

Все подробности см., например, в Постников, сечение IV.

Ex Для плоской св. на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ M_q и V_q парам.



множителям $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соотв., возмущ. кривые имеют

вид $(\gamma^1(T), \dots, \gamma^n(T), s_0^1, \dots, s_0^m)$. Для $p = (x_0^1, \dots, x_0^n)$,

$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $s = s^a e_a$ выберем $\gamma(T) = (x_0^1 + T v^1, \dots, x_0^n + T v^n)$,

тогда $\nabla_v s = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{s^a(x_0^1 + T v^1, \dots, x_0^n + T v^n) - s^a(x_0^1, \dots, x_0^n)}{T} e_a =$

$= s^a(x_0^1 + T v^1, \dots, x_0^n + T v^n) \Big|_{T=0} e_a = v^i \frac{\partial s^a}{\partial x^i} e_a$, как в ф-те выше.

Аффинные и римановы связности

Гладкость связки везде ∞ .

def. Аффинной связностью на гладком многобр. M наз. связность ∇ на расслоении TM (а (M, ∇) - мн-ем с афф. связностью).

Rem. П.е. это $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$:

$$- \nabla_{fX + gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$$

$$- \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$- \nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y \quad (\text{в ч-ти, } \nabla_X (\lambda Y) = \lambda \nabla_X Y)$$

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), f, g \in C^\infty(M)$, $\nabla_X Y$ - ковар. производная Y по X .

Rem. В лок. координатах $(x^1, \dots, x^n)$: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, и

$$\nabla_X Y = \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

где $\{ \Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U) \}_{i,j,k=1}^n$ - символы Кристоффеля,

кот. задают ∇ локально : $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Рем. Как теперь они меняются при замене координат?

Ес. При $\Gamma_{ij}^k = 0$ это плоская св-ть, В ч-ти на $\mathbb{R}^n$.
(уделится в том, что это не тензорный закон преобр.)

$$\nabla_x Y = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Рем. Как и в общем случае определяем св-ть в точке

$\nabla: T_p M \times \mathcal{X}(M) \rightarrow T_p M$ $(\nabla_x Y)_p = \nabla_{X_p} Y$ и производную
полю X вдоль кривой γ $\nabla_{\dot{\gamma}} X$, локально для

$\gamma = (x^1, \dots, x^n)$ $X(t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$: тогда, $\Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n)$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \left((X^k)' + \Gamma_{ij}^k (\dot{\gamma}^i)' X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla(M, \nabla)$

def. Поле $X \in C^\infty(I, TM)$ вдоль $\gamma \in C^1(I, M)$ наз. параллельным,

если $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$. Если при этом $X(t_0) = v \in T_{\gamma(t_0)} M$, а

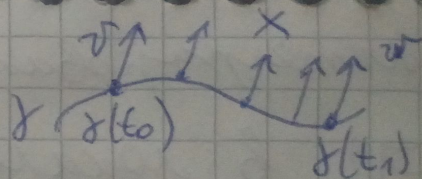
$X(t_1) = w \in T_{\gamma(t_1)} M$, то w называется результатом

параллельного переноса вектора v из $\gamma(t_0)$ в $\gamma(t_1)$ вдоль γ .

Рем. Из общего рез-та, такой перенос всегда $\exists$

($\forall$ вектора из T точки $\forall$ модулю)

Ес. Для $\mathbb{R}^n$ с плоской: $X^i = X^i_0$, т.е. это



обычный параллельный перенос (независимо от кривой)

деф. $\gamma \in C^\infty(I, M)$ наз. геодезической (M, ∇) , если $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$.
(вообще говоря),

Рем. Это условие не сохраняется при переходе к экв. кривой.

Зпр. При каких значениях параметра оно всё же сохраняется?

Рем. В лок. коорд. для $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ это условие

$$(\gamma^k)'' + \Gamma^k_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n)(\gamma^i)'(\gamma^j)' = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (*)$$

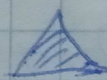
Рн. 1. $\forall p \in M, v \in T_p M \exists$ геог. $\gamma \in C^\infty(-\varepsilon, \varepsilon, M)$ для нек. $\varepsilon > 0$.

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v.$$

2. $\forall$ геог. $\gamma, \mu \in C^\infty(I, M)$ если $t_0 \in I$:

$$\gamma(t_0) = \mu(t_0) \text{ и } \gamma'(t_0) = \mu'(t_0), \text{ то } \gamma = \mu.$$

$\Rightarrow$ Как и в предыдущих аналогичных утв. (про

интегрирование полей и паралл. перенос) это следствие
 $\exists!$ в локальных координатах $\overbrace{(x^1, \dots, x^n)}$ решения задачи Коши
из уравнений (*) и условий $\bar{x}^i(t_0) = x_0^i, (\bar{x}^i)'(t_0) = \bar{v}^i$,
где $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ - координаты p , $\bar{v} = \bar{v}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тут
это система ОДУ 2-го порядка, нелинейная 
Ес. $\mathbb{R}^n$ с плоской: $(\bar{x}^i)'' = 0$, $\bar{i} = \overline{1, n}$, т.е. $\bar{x}^i = x_0^i + \bar{v}^i(t - t_0)$,
(прямые на прямых).

def. Крюккен афф. св-ти ∇ называется $T: \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M)$
 $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Если $T = 0$, ∇ наз. св-тио без кручения.

Вн. T - кососимметричное $(2, 1)$ -тенз. поле.

► Кососимм. $(T(X, Y) = -T(Y, X) \forall X, Y)$ следует из кососимм.
 $[\cdot, \cdot]$. Чтобы проверить тензорность, дост. проверить, что
это билинейное отображ. $C^\infty(M)$ -модулей. Линеитность

по сказанному следует из св-в ∇ и $[\cdot, \cdot]$ очевидно. То
 же на φ -уни (для второго арг. дн-но или по симметрии):

$$T(\varphi X, Y) = \nabla_{\varphi X} Y - \nabla_Y (\varphi X) - [\varphi X, Y] = \varphi \nabla_X Y - Y(\varphi) X - \varphi \nabla_Y X - \\
 - \varphi [X, Y] + Y(\varphi) X = \varphi T(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}(M), \varphi \in C^\infty(M) \quad \Delta$$

Рем. Пусть в лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ $\{T_{ij}^k\}$ - компоненты T ,
 т.е. $T = T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \otimes dx^j \Leftrightarrow T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$,
 левая часть равна $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] =$
 $= \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k} - 0$, т.е. $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ и ∇ -дег ун. $(\Leftrightarrow)$
 $\forall$ лок. коорд. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \forall i, j, k = \overline{1, n}$.

def. Пусть ∇ -афф. св. на M . Определим связность (ков.
 дифференцирование) на $TM^k \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}_+$:

$$(\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_k, d_1, \dots, d_l) := X(T(Y_1, \dots, Y_k, d_1, \dots, d_l)) - \\
 - T(\nabla_X Y_1, \dots, Y_k, d_1, \dots, d_l) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_k, d_1, \dots, d_l) - T(Y_1, \dots, Y_k,$$

$$\nabla_X \alpha_1, \dots, \alpha_e) = \dots = T(Y_1, \dots, Y_k, \alpha_1, \dots, \nabla_X \alpha_e),$$

$$\forall X \in \mathcal{X}(M), \bar{T} \in \mathcal{X}_e^k(M), Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(M), \alpha_1, \dots, \alpha_e \in \mathcal{X}(M)^*$$

Рем. В 4-м, $(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M),$
 $\alpha \in \mathcal{X}(M^*),$ и это деб. используется, если $e > 0$. Также
 при $k=e=0 \quad \nabla_X f = X(f)$, $\forall f \in C^\infty(M)$, и при $k=0, e=1 \quad (\nabla_X Y)(\alpha) = X(Y(\alpha)) -$
 $- Y(\nabla_X \alpha) = [\text{отнес. } \mathcal{X}(M) \text{ и } (\mathcal{X}(M)^*)^*] = X(\alpha(Y)) - (\nabla_X \alpha)(Y) =$
 $= [\text{оп-ла выше}] = \alpha(\nabla_X Y) = (\nabla_X Y)(\alpha) \text{ в смысле первоначальной } \nabla.$
Р. ∇ задаёт связность на TM_e^k .

► Прежде всего надо проверить, что $\nabla_X T \in \mathcal{X}_e^k(M)$. Линейность
 по слоению следует из линейности T , св-ва ∇ и дифференцирования.
 По умножению: в обозн. деб. выберем $\bar{e} = \bar{1}, k, f \in C^\infty(M)$:
 $(\nabla_X T)(Y_1, \dots, fY_{\bar{i}}, \dots, Y_k, \alpha_1, \dots, \alpha_e) = [\text{линейность } T \text{ и св-ва } \nabla] =$
 $= X(f T(Y_1, \dots, Y_{\bar{i}}, \dots, Y_k, \alpha_1, \dots, \alpha_e)) - f \sum_{j \neq \bar{i}} T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_j, \dots, \alpha_e) - T(Y_1, \dots, f \nabla_X Y_{\bar{i}} + X(f)Y_{\bar{i}}, \dots, \alpha_e) -$

$$- f \sum_{j=1}^l T(Y_1, \dots, \nabla_X \alpha_{\bar{j}}, \dots, \alpha_{\bar{l}}) = f(\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_{\bar{l}}, \dots, \alpha_{\bar{l}}) + X(f) T(Y_1, \dots, Y_{\bar{l}}, \dots, \alpha_{\bar{l}}) - X(f) T(Y_1, \dots, Y_{\bar{l}}, \dots, \alpha_{\bar{l}}), \text{ и аналогично для } f \alpha_{\bar{i}}.$$

Потенциально проверяем дифференциальное св-во на рассуждениях: $\nabla_{fX+gY} T = f \nabla_X T + g \nabla_Y T$
и $\nabla_X (T+S) = \nabla_X T + \nabla_X S$ ($\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), T, S \in \mathcal{X}_c^k(M), f, g \in C^\infty(M)$)
следующим из дифференциального и св-ва аддитивности св-та сразу. Наконец,

$$(\nabla_X (fT))(Y_1, \dots, \alpha_{\bar{l}}) = X(fT(Y_1, \dots, \alpha_{\bar{l}})) - \sum_{\bar{i}} f T(\dots \nabla_X Y_{\bar{i}}, \dots) - \sum_{\bar{j}} f T(\dots \nabla_X \alpha_{\bar{j}}, \dots) =$$

$$= f(\nabla_X T)(Y_1, \dots, \alpha_{\bar{l}}) + X(f) \cdot T(Y_1, \dots, \alpha_{\bar{l}}), \text{ т.е. } \nabla_X (fT) = f \nabla_X T + f(X) T$$

Рем. замечание: для 1-формы α , если $\alpha = \alpha_{\bar{i}} dx^{\bar{i}}$ и $\nabla_X \alpha =$
 $= (\nabla_X \alpha)_{\bar{i}} dx^{\bar{i}}$, то (где $X = X^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}$): $\forall \bar{i} = \overline{1, n}$

$$(\nabla_X \alpha)_{\bar{i}} = (\nabla_X \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \right) = X \left(\underbrace{\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \right)}_{\alpha_{\bar{i}}} \right) - \underbrace{\alpha \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \right)}_{X^{\bar{j}} \underbrace{\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^k}_{\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^k} \frac{\partial}{\partial x^k}} = X^{\bar{j}} \left(\frac{\partial \alpha_{\bar{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} - \Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^k \alpha_{\bar{k}} \right)$$

$$\text{В 4-м, } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}} dx^{\bar{j}} = [\alpha_k = \delta_k^{\bar{j}}] = 0 - \Gamma_{\bar{i} \ell}^{\bar{j}} dx^{\bar{\ell}}.$$

Тогда для T с компонентами $T_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_l}^{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_l}$ компоненты $\nabla_X T$ будут

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X T)_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_k}^{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_\ell} &= (\nabla_X T) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}_k}}, dx^{\bar{j}_1}, \dots, dx^{\bar{j}_\ell} \right) = X \left(T \left(\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}_1}}, \dots, dx^{\bar{j}_\ell} \right) \right) - \\
 &- \sum_{m=1}^k T \left(\dots, \nabla_X \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}_m}}, \dots \right) - \sum_{m=1}^{\ell} T \left(\dots, \nabla_X dx^{\bar{j}_m}, \dots \right) = X \left(\frac{\partial T_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_k}^{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_\ell}}{\partial x^{\bar{i}}} \right) - \sum_{m=1}^k \Gamma_{\bar{i} \bar{i}_m}^{\bar{u}} T_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_{m-1} \bar{u} \bar{i}_{m+1} \dots \bar{i}_k}^{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_\ell} + \\
 &+ \sum_{m=1}^{\ell} \Gamma_{\bar{i} \bar{j}_m}^{\bar{u}} T_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_k}^{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_{m-1} \bar{u} \bar{j}_{m+1} \dots \bar{j}_\ell}
 \end{aligned}$$

Риманова связность и римановы геодезические

def. Афф. связность ∇ наз. согласованной с римановой метрикой g на мн. M , если $\nabla_X g = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}(M)$ (согр. обозн.: $\nabla g = 0$). Если ∇ согласов. с g и без кручения, она наз. римановой связностью (св-ю Леви-Чивита) g (мн. (M, g)).

лем. Условие согласованности: $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, $\forall$ полн. X, Y, Z . В лок. коорд.: $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{kj}^l g_{il} + \Gamma_{ki}^l g_{lj} \quad \forall i, j, k = 1, n$.

пр. (формула Коттера). $\forall$ риманова (M, g) $\exists!$ риманова связность ∇ , ∇ ^{и она} ^{определяется} ~~формулой~~ ^{такой} формулой:

$$g(\nabla_x Y, z) = \frac{1}{2} (X(g(Y, z)) + Y(g(z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], z) - g([Y, z], X) + g([z, X], Y)) \quad \forall X, Y, z \in \mathcal{H}(M) \quad (*)$$

► ! Пусть ∇ - какая-то рим. св-ть g . Докажем тогда (*).

Она определяет ∇ однозначно (знание $g(X, Y) \forall Y$ однозначно определяет X , т.к. в силу $g_p > 0 \quad \forall p \in M \quad g_p(X_p, Y_p) \quad \forall Y_p = \sigma \in T_p M$ однозначно определяет X_p). Т.к. ∇ совм. с g :

$$X(g(Y, z)) = \cancel{g(\nabla_x Y, z)} + \cancel{g(Y, \nabla_x z)}$$

$$Y(g(z, X)) = \cancel{g(\nabla_y z, X)} + \cancel{g(z, \nabla_y X)}$$

$$-Z(g(X, Y)) = -\cancel{g(\nabla_z X, Y)} - \cancel{g(X, \nabla_z Y)}$$

Т.к. ∇ без круч.: $g([X, Y], z) = \cancel{g(\nabla_x Y, z)} - \cancel{g(\nabla_y X, z)}$
 $-g([Y, z], X) = -\cancel{g(\nabla_y z, X)} + \cancel{g(\nabla_z X, X)}$
 $g([z, X], Y) = \cancel{g(\nabla_z X, Y)} - \cancel{g(\nabla_x z, Y)}$

Приводя подобные, получаем требуемое.

Лемма для век. пространства (M, g) обозначим правую часть (*) через $F(X, Y, Z)$; $F: \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow C^\infty(M)$.
Заметим, что F 3-линейно отн. скалярному произведению, и $\forall X, Y, Z$

$$\langle \text{скалярное произведение} \rangle \in \mathcal{H}(M), f \in C^\infty(M):$$

$$F(fX, Y, Z) = f F(X, Y, Z) + \frac{1}{2} (Y(f) g(Z, X) - Z(f) g(X, Y) - Y(f) g(X, Z) + \\ + Z(f) g(X, Y)) = f \cdot F(X, Y, Z)$$

$$F(X, fY, Z) = f F(X, Y, Z) + \frac{1}{2} (X(f) g(Y, Z) - Z(f) g(X, Y) + X(f) g(Y, Z) + \\ + Z(f) g(Y, X)) = f \cdot F(X, Y, Z) + X(f) g(Y, Z)$$

$$F(X, Y, fZ) = f F(X, Y, Z) + \frac{1}{2} (X(f) g(Y, Z) + Y(f) g(Z, X) - Y(f) g(Z, X) - \\ - X(f) g(Z, Y)) = f F(X, Y, Z). \text{ Таким образом } X, Y \in \mathcal{H}(M).$$

$$\text{Тогда в силу } F(X, Y, fZ + gW) = f F(X, Y, Z) + g F(X, Y, W)$$

$$(\forall \text{ полей } X, Y, Z, W; f, g \in C^\infty(M)) \exists! \nabla_X Y \in \mathcal{H}(M): F(X, Y, Z) = \\ = g(\nabla_X Y, Z). \text{ Действительно, } \forall p \in M \quad \forall v \in T_p M$$

$$\forall Z, \tilde{Z} \in \mathcal{X}(M): Z_p = \tilde{Z}_p = v \quad F(X, Y, Z)(p) = F(X, Y, \tilde{Z})(p)$$

доказывается аналогично соответствующим свойствам для 3-формы на M .

Поэтому можно определить $(\nabla_X Y)_p$ условием $g_p((\nabla_X Y)_p, v) = F(X, Y, Z)(p)$, где $Z: Z_p = v$. Зам. $\nabla_X Y$ также (натурально, рассмотрим в лок. коорд.) Тогда $g(\nabla_X Y, Z) = F(X, Y, Z)$, и

$$\begin{aligned} g(\nabla_{fX+gY} Z, W) &= F(fX+gY, Z, W) = f F(X, Z, W) + g F(Y, Z, W) = \\ &= g(f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z, W) \end{aligned}$$

$$g(\nabla_X (Y+Z), W) = F(X, Y+Z, W) = F(X, Y, W) + F(X, Z, W) = g(\nabla_X Y + \nabla_X Z, W)$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_X (fY), Z) &= F(X, fY, Z) = f F(X, Y, Z) + X(f) g(Y, Z) = \\ &= g(f \nabla_X Y + X(f) Y, Z) \end{aligned}$$

$$\forall X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M), f, g \in C^\infty(M)$$

Отсюда, ∇ — связность. Проверим, что она без кр.: $\forall X, Y, Z$

$$g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = F(X, Y, Z) - F(Y, X, Z) = \frac{1}{2} (g([X, Y], Z) - g([Y, X], Z)) =$$

$$g([X, Y], Z) \text{ (тут остальные члены сократились), совп. с } g:$$

$$g(\nabla_x Y, z) + g(Y, \nabla_x z) = F(X, Y, z) + F(X, z, Y) = X g(Y, z)$$

(снова всё остальное сохр.) Тут мы снова - тами напередой раз

используем, что если $g(x, z) = g(y, z) \forall z$, то $x = y$ итак,

∇ - знак св. г Δ

Rem. В нук. коорг.: $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $i, j, k = \overline{1, n}$!

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + 0 \right)$$

$$(m.k. \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \forall i, j) : \quad \Gamma_{ij}^l g\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

У к домпосам на d^{km} и слоним: $i_{y,k}$ - с.к. Ирода из класс. учебников, напис. Пир

$$\Gamma_{i\bar{j}}^m = \Gamma_{i\bar{j}}^l (g_{l\bar{k}} g^{k\bar{m}}) = \frac{1}{2} g^{k\bar{m}} \left(\frac{\partial g_{\bar{j}k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{\bar{j}}} - \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial x^k} \right)$$

Е₂ Для E^n $g_{ij} = \delta_{ij}$ - пост., поэтому связность плоская
(все $\Gamma_{ij}^k = 0$).

Зет В дальнейшем, если понятно, о какой рим. м-ке g идёт речь, будем обозн. соотв. нормы и поля норм через $|\cdot|$, т.е.

$$|\sigma| = \sqrt{g_p(\sigma, \sigma)} \text{ для } \sigma \in T_p M \text{ и } |X| = \sqrt{g(X, X)} \text{ для поля (в т.ч. вдоль кривой)}$$

Лем. Если св-ть ∇ согласована с рим. м-кой g , то $\forall X, Y$ паралл. вдоль кривой γ $g(X, Y)$ постоянно вдоль γ (и в ч-ти $|X|$).

$\Rightarrow$ П.е. $f \in C^\infty(I, M)$, $X, Y \in C^\infty(I, TM)$: $\forall t \in I$ $X(t), Y(t) \in T_{f(t)} M$. Тогда $g(X, Y) \in C^\infty(I)$, и $g(X, Y)' = g(\nabla_{\dot{f}} X, Y) + g(X, \nabla_{\dot{f}} Y)$

Это можно установить, продолжая X, Y ~~векторами~~ полями на M (Y_p)

или в лок. коорд.: если $\gamma = (x^1, \dots, x^n)$, $g = g_{ij} dx^i dx^j$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ (тут $X^i, Y^j \in C^\infty(I \cap \gamma^{-1}(U))$, где U - коорд. окр-ть):

$$g(X, Y) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n) X^i Y^j$$

$$g(X, Y)' = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} (x^k)' X^i Y^j + g_{ij} (X^i)' Y^j + g_{ij} X^i (Y^j)' = [\text{сум.}] =$$

$$= g_{ij} (\Gamma_{ki}^l (x^k)' X^i + (X^l)' Y^j + g_{il} X^i (\Gamma_{kj}^l (x^k)' Y^j + (Y^l)') =$$

$= g(\nabla_{X_1} X, Y) + g(X, \nabla_{X_1} Y)$. Если X, Y - паралл., то $\nabla_{X_1} X = \nabla_{X_1} Y = 0$, поэтому $g(X, Y)$ - const. на прообразе I (и в ч-ти $g(X, X)$).

Рем. Т.е. паралл. перенос в этом случае сохраняет длины векторов и углы между ними.

Соч. Если γ - геодезическая св-ти, согласованной с метрикой, то $|\gamma'|$ постоянно $\Rightarrow \gamma$ -геод. $(\Rightarrow \nabla_{\gamma'} \gamma' = 0)$, т.е. γ' -паралл. Δ

Рем. В ч-ти, мы знаем, что $\forall p \in M \forall v \in T_p M \exists!$ геод. $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M: \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Тогда $|\gamma'| = |v|$, т.е. γ либо постоянна (при $v = 0$), либо регулярна ($v \neq 0$) и с "почти натуральной" параметризацией.

Рем. При замене параметра $\tau = at + b$ $\nabla_{\gamma'_\tau} \gamma'_\tau = a^2 \nabla_{\gamma'_t} \gamma'_t$, т.е. при $a \neq 0$ св-во γ быть геодез. сохраняется. В ч-ти, оно сохр. при замене одного из параметра на функцию ($\tau = c \pm s$).