Функціональний аналіз II
Тема 2. Базис Шаудера
Лекції 7-8

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

https://en.wikipedia.org/wiki/Juliusz_Schauder

Послідовність $\{e_n\}_1^\infty$ елементів банахового простору X називається базисом (або, що те саме, базисом Шаудера) в X, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ існує єдина послідовність коефіцієнтів $\{a_n\}_1^\infty$, для яких ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ збігається до x. Ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ називається розкладом елемента x за базисом $\{e_n\}_1^\infty$, а числа $\{a_n\}_1^\infty$ називаються коефіцієнтами розкладу.

Твердження 1. Елементи базису лінійно незалежні між собою. Зокрема, елемент базису не може дорівнювати нулю.

Твердження 2. Базис $\{e_n\}_1^\infty$ банахового простору X – це повна в X множина: $\overline{\mathrm{Lin}}\,\{e_n\}_1^\infty = X$.

Твердження 3. Якщо банахів простір X має базис Шаудера, то X нескінченновимірний і сепарабельний.

Приклади базисів Шаудера в класичних просторах

Нехай X – один з просторів послідовностей ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ або c_0. Канонічним базисом простору X називається така система векторів $\{e_n\}_1^\infty$: $e_1 = (1, 0, 0, \ ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ ...)$, ...

Твердження 4. Канонічний базис простору c_0 – це базис. При $1 \leqslant p < \infty$ канонічний базис простору ℓ_p – це базис. Канонічний базис простору ℓ_∞ не буде базисом цього простору.

Вправа 4.1. Простір ℓ_∞ несепарабельний, отже, там немає жодного базису Шаудера.

Проблема базиса

Вельми непростою виявилась поставлена ще С. Банахом проблема: чи кожен сепарабельний нескінченновимірний банахів простір має базис?

(повчальна розповідь про "Шкотську книгу"на дошці ☺)

Проблема базиса

Вельми непростою виявилась поставлена ще С. Банахом проблема: чи кожен сепарабельний нескінченновимірний банахів простір має базис?

(повчальна розповідь про "Шкотську книгу"на дошці ☺)

https://en.wikipedia.org/wiki/Scottish_Book

Kawiarnia Szkocka

Негативну відповідь на проблему Банаха дав у 1973 році П. Енфло.

https://perenflo.com/autobiography

Мазур, Енфло та гусак

Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – базис банахового простору X, $x \in X$. Позначимо через $e_n^*(x)$ коефіцієнти розкладу елемента x за базисом $\{e_n\}_1^\infty$, а через $S_n(x)$ – частинні суми цього розкладу:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)\, e_k.$$

Твердження 5. e_n^* – лінійні функціонали на X, а S_n – лінійні оператори, які діють з X в X.

Доведення. Нехай $x, y \in X$, a, b – довільні скаляри. Тоді маємо такі розклади:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(x)\, e_k,\ y = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(y)\, e_k,\ ax + by = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(ax+by)\, e_k.$$

Отже, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a e_k^*(x) + b e_k^*(y)\right) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(ax+by)\, e_k$.

З огляду на єдиність розкладу елемента за базисом отримуємо, що $a e_k^*(x) + b e_k^*(y) = e_k^*(ax+by)$. □

Надалі функціонали e_n^* ми називатимемо координатними функціоналами, а оператори S_n – операторами частинних сум за базисом $\{e_n\}_1^\infty$.

Теорема 1. (С. Банах). Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – базис банахового простору X. Тоді оператори S_n частинних сум і координатні функціонали e_n^* неперервні,

$$\sup_n \{\|e_n\| \cdot \|e_n^*\|\} < \infty$$

і

$$\sup_n \|S_n\| < \infty.$$

Простір коефіцієнтів

Лема 1. Нехай X – банахів простір, $e_n \in X$ – фіксована послідовність ненульових векторів. Введемо простір E всіх числових послідовностей $a = (a_n)_1^\infty$, для яких ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ збігається. Наділимо простір E нормою

$$\|a\| = \sup \left\{ \left\| \sum_{n=N}^{M} a_n e_n \right\| : \ 1 \leqslant N \leqslant M \right\}.$$

Тоді E – банахів простір.

Доведення теореми Банаха

Для базису $\{e_n\}$ розглянемо відповідний простір E з Леми 1. E – це банахів простір. Означимо оператор $T\colon E \to X$ рівністю $Ta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Оператор T бієктивний, оскільки $\{e_n\}_1^{\infty}$ – базис. З очевидної нерівності $\|Ta\| \leqslant \|a\|$ випливає неперервність оператора. Отже, за теоремою Банаха про обернений оператор, оператор T^{-1} також неперервний. Це означає існування такої сталої C, що $\|a\| \leqslant C\|Ta\|$ для будь-якого $a \in E$. Іншими словами, для будь-якого $a \in E$

$$\sup\left\{\left\|\sum_{n=N}^{M} a_n e_n\right\| : 1 \leqslant N \leqslant M\right\} \leqslant C\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|.$$

Остання нерівність дає усі потрібні твердження теореми. $\square$

Базисна константа. Монотонні базиси.