# Теорія міри і інтеграла
# Тема 5: Вимірні функції
## Лекція 17

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

# Зміст лекції

Зв'язок збіжності за мірою і збіжності майже скрізь

Теорема Єгорова

Протягом цієї лекціїї $(\Omega, \Sigma, \mu)$ – простір з мірою.

Послідовність функцій $(f_n)$ називається збіжною майже скрізь до функції $f$ (позначення: $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$), якщо множина тих $t \in \Omega$, де $f_n(t)$ не прямує до $f(t)$ при $n \to \infty$, нехтувана.

Послідовність функцій $(f_n)$ називається збіжною за мірою до функції $f$ (позначення: $f_n \xrightarrow{\mu} f$), якщо для будь-якого $a > 0$

$$\mu\left(|f_n - f|_{>a}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Верхньою границею послідовності множин $(A_n)$ називається множина $\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Теорема про верхню границю послідовності множин.
Нехай $A_n \in \Sigma$, $A_\infty = \overline{\lim} A_n$. Тоді

(i) $\mu(A_\infty) \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mu(A_n)$.
Зокрема, якщо $\mu(A_\infty) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

(ii) (Лема Бореля – Кантеллі). Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, то $\mu(A_\infty) = 0$.

**Теорема 1 (Лебег).** Із збіжності майже скрізь випливає збіжність за мірою. Детальніше: якщо $f, f_n$ – вимірні функції на $\Omega$ і $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$, то $f_n \overset{\mu}{\to} f$.

**Доведення.** За умовою, множина $D$ всіх точок, де $f_n$ не прямує до $f$, нехтувана. Зафіксуємо $a > 0$. Розглянемо множини

$$A_n = |f_n - f|_{>a} \text{ і } A_\infty = \overline{\lim} A_n.$$

За означенням верхньої границі, $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, тобто $A_\infty$ – це множина таких точок $t \in \Omega$, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує $k > n$, при якому $|f_k(t) - f(t)| > a$. Отже, $A_\infty \subset D$ і $\mu(A_\infty) = 0$. За лемою про верхню границю, $\mu(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто $\mu\left(|f_n - f|_{>a}\right) \to 0$ $(n \to \infty)$. □

Лема. Нехай $f_n$ – вимірні функції, $a_n$ і $\varepsilon_n$ – додатні числа, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Далі, нехай $f_n$ задовольняють умову $\mu\left(|f_n|_{>a_n}\right) < \varepsilon_n$. Тоді $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} 0$.

Доведення. Введемо позначення: $D$ – це множина всіх точок, де $f_n$ не прямує до 0, $A_n = |f_n|_{>a_n}$, $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$,

$$A_\infty = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Нехай $t \in \Omega$ – довільна точка, де $f_n(t)$ не прямує до нуля. Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує $k \geqslant n$, при якому $|f_k(t)| > a_k$, тобто $t \in B_n$. Отже, $D \subset B_n$ при всіх $n$ і $D \subset A_\infty$.

Водночас, за умовою, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$.
Застосуємо частину (ii) леми про верхню границю послідовності множин: $\mu(D) \leqslant \mu(A_\infty) = 0$. □

Теорема 2 (Ф. Ріс). Будь-яка послідовність вимірних функцій, збіжна за мірою, містить збіжну майже скрізь підпослідовність.

Доведення. Нехай $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Зафіксуємо $a_n, \varepsilon_n > 0$, які задовольняють умову попередньої леми, і виберемо зростаючу послідовність індексів $m_n$ так, щоб $\mu\left(|f_{m_n} - f|_{>a_n}\right) < \varepsilon_n$. За лемою, $f_{m_n} - f \xrightarrow{\text{м.с.}} 0$, тобто $f_{m_n} \xrightarrow{\text{м.с.}} f$. □

**Теорема 3 (критерій збіжності за мірою).** Послідовність вимірних функцій $(f_n)$ збігається за мірою до функції $f$ тоді і тільки тоді, коли будь-яка підпослідовність послідовності $(f_n)$, у свою чергу, містить підпослідовність, збіжну до $f$ майже скрізь.

*Доведення.* Нехай $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Тоді кожна підпослідовність послідовності $(f_n)$ також збігається за мірою і, згідно з попередньою теоремою, містить підпослідовність, збіжну до $f$ майже скрізь. Навпаки, нехай $f_n$ не збігається за мірою до $f$. Тоді існують такі $a, \varepsilon > 0$ і така підпослідовність $(g_n)$ послідовності $(f_n)$, що жодна з функцій $g_n$ не лежить в околі $U_{a,\varepsilon}(f)$. Тоді підпослідовність $(g_n)$ не містить збіжних за мірою до $f$ підпослідовностей, а отже, за теоремою 1, не містить і збіжних майже скрізь до $f$ підпослідовностей. $\square$

Наслідок. Нехай $X$, $Y$ і $Z$ – множини вимірних функцій на $\Omega$; $X$ м.с.-щільна в $Y$, $Y$ м.с.-щільна в $Z$, тоді $X$ м.с.-щільна в $Z$.

Доведення. Згідно з теоремою 1, $X$ щільна в $Y$ і $Y$ щільна в $Z$ в топології збіжності за мірою. Отже, $X$ щільна в $Z$ в топології збіжності за мірою. Тому, за теоремою з попередньої лекції $X$ буде і секвенційно щільною в $Z$ в сенсі збіжності за мірою, тобто для будь-якого $f \in Z$ існує така послідовність $(f_n)$ елементів множини $X$, що $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Залишається скористатись теоремою 2. □

Збіжність майже скрізь на відрізку не можна задати ніякою топологією.

Функції $g_n(x) = x^n$ на відрізку $[0, 1]$ є типовим прикладом послідовності, збіжної в кожній точці, але не збіжної рівномірно. Водночас збіжність можна покращити, усунувши як завгодно малий окіл точки 1: на відрізку $[0, 1-\varepsilon]$, що залишився, збіжність вже буде рівномірною. Аналогічна ситуація виникає в теорії степеневих рядів: ряд збігається до своєї суми рівномірно не у всьому крузі збіжності, але в будь-якому крузі меншого радіуса. Ці ефекти є частковими випадками загального результату.

Теорема Єгорова. Нехай $f_n \to f$ майже скрізь на $\Omega$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $A = A_\varepsilon \in \Sigma$ з $\mu(A) < \varepsilon$, на доповненні до якої послідовність $(f_n)$ рівномірно збігається до $f$.

Доведення. Зафіксуємо $a_n, \varepsilon_n > 0$, $a_n \longrightarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$. Розглянемо множини $A_{m,n} = |f_m - f|_{>a_n}$ і $B_{m,n} = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_{k,n}$. При фіксованому $n$ множини $B_{m,n}$ утворюють спадний за $m$ ланцюжок множин, і $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m,n}\right) = 0$ (оскільки $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m,n}$ міститься в нехтуваній множині – множині $D$ всіх точок, де $f_n$ не прямує до $f$). Отже, $\mu\left(B_{m,n}\right) \to 0$ $(m \to \infty)$. Для кожного $n$ виберемо такий індекс $m_n$, що $\mu\left(B_{m_n,n}\right) < \varepsilon_n$. Доведемо, що $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{m_n,n}$ є потрібною множиною. Справді,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Далі, $\Omega \setminus A \subset \Omega \setminus B_{m_n,n}$, тобто для будь-якого $k > m_n$ множина $A_{k,n} = |f_k - f|_{>a_n}$ не містить точок множини $\Omega \setminus A$. Отже,

$$\sup_{t \in \Omega \setminus A} |f_k(t) - f(t)| \leqslant a_n \text{ при } k > m_n.$$

Це і означає потрібну рівномірну збіжність на $\Omega \setminus A$. $\square$