Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 10

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

За означенням, банахів простір X має нормальну структуру, якщо у будь-якої опуклої замкненої обмеженої підмножини $V \subset X$, що складається більше ніж з однієї точки, існує недіаметральний елемент.

Приклади.

1. Будь-який скінченновимірний банахів простір має нормальну структуру.
2. Гільбертів простір має нормальну структуру.
3. Простір ℓ_1 не має нормальної структури. Множиною, у якої всі точки діаметральні, буде

$$V = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1, x_k \geqslant 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

4. Простір c_0 не має нормальної структури. Розгляньте множину $V = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0 : 1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots\}$.
5. Простори $C[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ і $L_1[0,1]$ не мають нормальної структури.

Група G із заданою на ній відокремлюваною за Гаусдорфом топологією τ називається топологічною групою, якщо топологія узгоджена з груповою структурою в такому розумінні:

1) операція $(x, y) \mapsto x \cdot y$ добутку елементів неперервна за сукупністю змінних;
2) неперервна операція $x \mapsto x^{-1}$ переходу до оберненого елемента.

Прикладами топологічних груп є нормований простір з операцією додавання, одиничне коло в $\mathbb{C}$ з операцією множення, множина всіх унітарних матриць порядку n з операцією множення матриць, наділена метрикою із простору операторів, група оборотних елементів будь-якої банахової алгебри і багато інших груп, що виникають природним способом в задачах аналізу.

Для груп означені операції над підмножинами

$$A_1A_2 = \{a_1a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}; \quad A^{-1} = \{\, a^{-1} : a \in A\}.$$

Позначимо через e одиничний елемент топологічної групи G, а через $\mathfrak{O}_e$ – систему всіх околів елемента e.

Властивості.

(i) Для будь-якого $x \in G$ множини вигляду xU, $U \in \mathfrak{O}_e$, утворюють базу околів елемента x.

(ii) Таку ж властивість має система множин $U \cdot x$, $U \in \mathfrak{O}_e$.

(iii) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що $U \cdot U \subset W$.

(iv) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що $U^{-1} \subset W$.

(v) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що одночасно

$$U \cdot U^{-1} \subset W, \; U^{-1}U \subset W \text{ і } U \cdot U \subset W.$$