Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 9

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст попередніх серій ☺

Теорема Ломоносова. Нехай $A \in L(X) \setminus \{0\}$ – цілком неперервний оператор у нескінченновимірному комплексному банаховому просторі. Тоді у всіх операторів, які комутують з A, існує спільний нетривіальний інваріантний підпростір.

Почнемо сьогоднішню лекцію з обговорення наслідків та обмежень у застосуванні теореми.

Наслідок. Якщо оператор T комутує хоча б з одним цілком неперервним оператором, то в оператора T є нетривіальні інваріантні підпростори.

Приклад. Оператор зсуву $U(a_1, a_2, ...) = (0, a_1, a_2, ..)$ в ℓ_2 не комутує з жодним цілком неперервним оператором, водночас нетривіальні інваріантні підпростори в нього є.

Нагадаємо, що діаметром множини V в метричному просторі X називається величина

$$\operatorname{diam}(V) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in V\}.$$

Радіусом множини V в точці $x \in V$ називається найменший радіус $r_x(V)$ замкненої кулі з центром в x, що містить всю множину V. Еквівалентне означення:

$$r_x(V) = \sup\{\rho(x, y) : y \in V\}.$$

Очевидно,

$$\operatorname{diam}(V) = \sup_{x \in V} r_x(V). \qquad (*)$$

Точка $x \in V$ називається діаметральним елементом множини V, якщо $r_x(V) = \operatorname{diam}(V)$.

Лема 1. Нехай V – опуклий компакт у нормованому просторі X, що складається більше ніж з однієї точки. Тоді у V існує недіаметральний елемент, тобто існує $x \in V$, для якого $r_x(V) < \operatorname{diam}(V)$.

Доведення. Зафіксуємо додатне $\varepsilon < \operatorname{diam}(V)$ і виберемо у множині V ε-сітку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Шуканий недіаметральний елемент x виберемо як середнє арифметичне елементів ε-сітки: $x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

Розглянемо довільний $y \in V$. Тоді

$$\|x - y\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}(x_k - y)\right\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k - y\|.$$

Принаймні один з доданків в останній сумі не перевищує ε, а решта оцінюються зверху числом $\operatorname{diam}(V)$. Отже,

$$\|x - y\| \leqslant \frac{n-1}{n}\operatorname{diam}(V) + \frac{1}{n}\varepsilon.$$

Переходячи до супремума за $y \in V$, одержуємо

$$r_x(V) \leqslant \frac{n-1}{n}\operatorname{diam}(V) + \frac{1}{n}\varepsilon < \operatorname{diam}(V). \qquad \square$$

Лема 2. Нехай V – компакт у метричному просторі X, $f\colon V \to V$ – ізометрія компакта V в себе. Тоді f бієктивна.

(на дошці)

Лема 3. Нехай V – опуклий компакт у нормованому просторі X, що складається більше ніж з однієї точки. Тоді існує непорожній опуклий компакт $V_0 \subset V$, $V_0 \neq V$, інваріантний відносно всіх ізометрій компакта V в себе.

Доведення. Скориставшись лемою 1, виберемо $x_0 \in V$ з $r_{x_0}(V) < \operatorname{diam}(V)$. Введемо позначення $r_0 = r_{x_0}(V)$ і за шукане V_0 візьмемо множину всіх $x \in V$, для яких $r_x(V) \leqslant r_0$. За побудовою $x_0 \in V_0$, тобто V_0 непорожня. Далі, згідно $(*)$, у V існують точки з $r_x(V) > r_0$ (насправді, на підставі компактності, навіть з $r_x(V) = \operatorname{diam} V$). Отже, $V_0 \neq V$.

Зазначимо, що точка $x \in V$ потрапляє в V_0 тоді і тільки тоді, коли відстані від x до всіх $y \in V$ не перевищують r_0. Тобто V_0 можна записати у вигляді перетину

$$V_0 = V \cap \left(\bigcap_{y \in V} \bar{B}(y, r_0) \right)$$

опуклих замкнених множин, тому V_0 сама – опукла замкнена множина. Залишилось перевірити інваріантність відносно всіх ізометрій $T\colon V \to V$. Нехай $x \in V_0$, нам потрібно довести, що $T(x) \in V_0$. Тобто потрібно довести, що $\|T(x) - y\| \leqslant r_0$ для будь-якого $y \in V$. Справді, з огляду на бієктивність точка y має вигляд $y = T(z)$, $z \in V$. Відповідно,

$$\|T(x) - y\| = \|T(x) - T(z)\| = \|x - z\| \leqslant r_0. \qquad \square$$

Теорема Какутані. Нехай K – непорожній опуклий компакт в нормованому просторі X. Тоді у всіх ізометрій компакта K в себе існує спільна нерухома точка.

Доведення. Розглянемо сім'ю W всіх опуклих замкнених підмножин $V \neq \emptyset$ компакта K, які мають ту властивість, що

$$T(V) \subset V \text{ для будь-якої ізометрії } T\colon K \to K. \qquad (**)$$

Упорядкуємо сім'ю W за спаданням множин. Пропонуємо читачеві самостійно перевірити, що перетин будь-якого ланцюжка елементів сім'ї W – це знову елемент сім'ї W, тобто сім'я W індуктивно впорядкована (непорожність перетину елементів ланцюга гарантується компактністю множини K). За лемою Цорна, у W існує мінімальний за включенням елемент V. З леми 3 випливає, що цей мінімальний елемент не може містити більше однієї точки. Отже, V складається з одного елемента $x_0 \in K$, а умова $(**)$ означає, що x_0 – нерухома точка для всіх ізометрій $T\colon K \to K$. $\square$

Приклад. Нехай V – деяка куля нормованого простору. Тоді (a) центр кулі V – спільна нерухома точка всіх бієктивних ізометрій $T\colon V \to V$; (b) інших спільних нерухомих точок всіх бієктивних ізометрій $T\colon V \to V$ немає.

Вправа. Наведіть приклад кулі в метричному просторі, де не виконується пункт (a) попередньої вправи. Те ж для п. (b). Наведіть приклад, де не виконується ні п. (a), ні п. (b).