Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 8

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Замкнений підпростір Y банахового простору X називається інваріантним підпростором для оператора $A \in L(X)$, якщо $A(Y) \subset Y$. Підпростір $Y \subset X$ назвемо нетривіальним, якщо він не збігається ні з нулем, ні з усім простором X. Знання інваріантних підпросторів допомагає зрозуміти структуру оператора. Так, наприклад, в лінійній алгебрі для побудови жорданової форми виділяють кореневі підпростори; розклад простору в пряму суму інваріантних підпросторів дозволяє зводити розв'язок рівняння $Ax = b$ до рівнянь у відповідних підпросторах.

Мабуть, найважливіша на сьогодні нерозв'язана задача теорії операторів – це проблема інваріантного підпростору: чи у будь-якого обмеженого оператора в гільбертовому просторі існує нетривіальний інваріантний підпростір?
Проблемі інваріантного підпростору присвячено багато наукових робіт. У різних банахових просторах (наприклад, в ℓ_1) відомі приклади неперервних операторів без нетривіальних інваріантних підпросторів. Відомі також позитивні результати, серед яких першим була теорема фон Неймана: (J. von Neumann) у будь-якого компактного оператора в гільбертовому просторі існує нетривіальний інваріантний підпростір. Теорему фон Неймана було доведено в 30-х роках XX століття, але опубліковано вперше через 20 років Ароншайном і Смітом, які поширили результат на випадок банахового простору.

Сьогодні ми доведемо теорему існування інваріантного підпростору, яка належить колишньому харків'янину Віктору Ломоносову (1946 – 2018).

https://en.wikipedia.org/wiki/Victor_Lomonosov
https://www.degruyter.com/view/book/9783110656756/10.1515/9783110656756-202.xml

Протягом цієї лекції X – фіксований банаховий простір, $A \in L(X)$. Зробимо для початку декілька зауважень.

(i) Нехай G – підмножина в X, для якої $A(G) \subset G$. Тоді $A(\mathrm{Lin}\, G) \subset \mathrm{Lin}\, G$.

(ii) Нехай E – лінійний підпростір простору X, $A(E) \subset E$. Тоді замикання підпростору E також буде інваріантним для A.

(iii) Ядро оператора і замикання образу – це інваріантні підпростори.

(iv) Для будь-якого елемента $x \in X \setminus \{0\}$ множина $G = \{A^n x\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умову зауваження (i). Отже, замикання лінійної оболонки множини G утворює інваріантний підпростір оператора A.

(v) Загальніший приклад. Нехай M – підалгебра алгебри $L(X)$ (тобто лінійний підпростір, який містить одиничний оператор і разом з будь-якими двома своїми елементами містить і їхній добуток), $x \in X \setminus \{0\}$. Означимо орбіту елемента x як множину $M(x) = \{ Tx : \ T \in M\}$. Тоді замикання орбіти – це інваріантний підпростір для будь-якого оператора з підалгебри M.

Теорема Ломоносова. Нехай $A \in L(X) \setminus \{0\}$ – цілком неперервний оператор у нескінченновимірному комплексному банаховому просторі. Тоді у всіх операторів, які комутують з A, існує спільний нетривіальний інваріантний підпростір.

Підготовча робота: нагадування фактів про компактні оператори, скінченновимірність власних підпросторів, інваріантність власних підпросторів для операторів, що комутують з даним (на дошці).

Початок доведення

Будемо міркувати методом від супротивного, тобто припустимо, що немає такого спільного інваріантного підпростору. Зафіксуємо відкриту кулю U в просторі X так, щоб компакт K, утворений замиканням множини $A(U)$, не містив нуля. Нехай M – підалгебра алгебри $L(X)$, що складається з усіх операторів, які комутують з A.

Зазначимо, що орбіта $M(x)$ будь-якого ненульового елемента щільна в X, інакше, згідно із зауваженням (v), замикання орбіти було б спільним нетривіальним інваріантним підпростором для операторів з M. Тому для будь-якої точки $s \in K$ можна знайти такий оператор $T_s \in M$, що $T_s(s) \in U$. Тоді T_s також переводить в U і деякий окіл V_s елемента s.

Застосування принципу Шаудера

Околи V_s при s, що пробігає множину K, утворюють відкрите покриття компакта K. Тому існує така скінченна підмножина $J \subset K$, що $\bigcup_{s \in J} V_s \supset K$.
Нехай функції $\varphi_s \in C(K)$, $s \in J$ утворюють відповідний розклад одиниці, тобто $\varphi_s \geqslant 0$, $\sum_{s \in J} \varphi_s \equiv 1$ і $\operatorname{supp}\varphi_s \subset V_s$.
Введемо в розгляд таке відображення $F\colon K \to X$:

$$F(x) = A\left(\sum_{s \in J} \varphi_s(x) \cdot T_s(x)\right).$$

Для будь-якого $x \in K$ ненульовими в останній сумі будуть тільки ті доданки, де $\varphi_s(x) \neq 0$, тобто ті, для яких $x \in V_s$. Якщо $x \in V_s$, то, за побудовою, $T_s(x) \in U$ і, отже, $F(x) \in K$. Отож $F(K) \subset K$, і ми перебуваємо в умовах принципу Шаудера. Позначимо x_0 нерухому точку відображення F.

Звершення доведення

Тоді x_0 буде нерухомою точкою і для такого компактного оператора $T \in M$:

$$T = A\left(\sum_{s\in J} \varphi_s\left(x_0\right) T_s\right).$$

Розглянемо власний підпростір $Y = \operatorname{Ker}\left(T - I\right)$. Цей підпростір Y буде інваріантним для оператора A. На підставі компактності оператора T підпростір Y скінченновимірний. Оскільки будь-який оператор у скінченновимірному просторі має власні числа, деяке власне число μ є і в обмеження оператора A на підпростір Y. Позначимо через E власний підпростір оператора A, відповідний власному числу μ.
У такому разі підпростір E буде інваріантним для всіх операторів, які комутують з оператором A. $\square$