Критерій компактності в $\mathbb{R}^m$

Теорема. Нехай $K \subset \mathbb{R}^m$.

K – компактна множина $\Longleftrightarrow$ K замкнена і обмежена

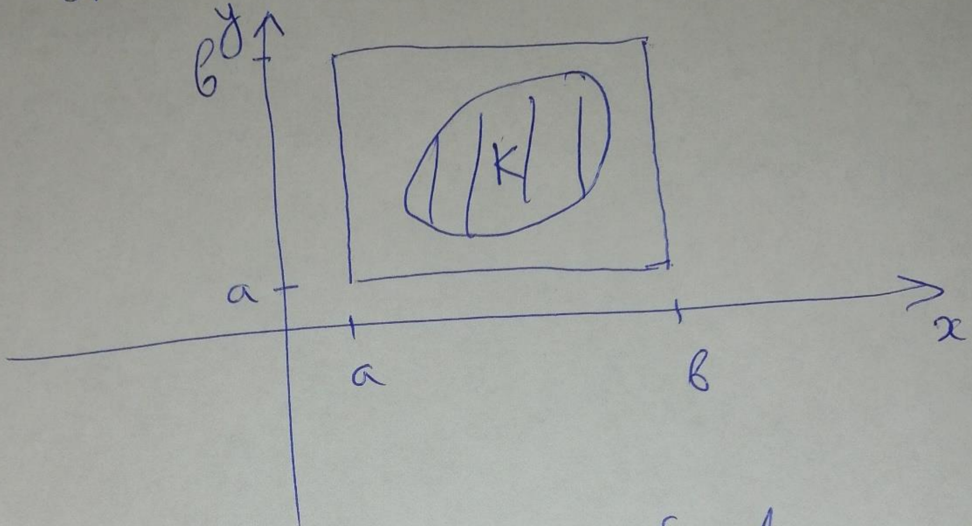
Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай K компактна. Покажемо, що K замкнена. Нехай $\{x^{(n)}\} \subset K$ і $x^{(n)} \longrightarrow a$. Оскільки K компактна, то $\exists \{x^{(n_j)}\} \subset \{x^{(n)}\}$: $x^{(n_j)} \xrightarrow[j \to \infty]{} b \in K$. Але $x^{(n_j)} \xrightarrow[j \to \infty]{} a$.

Тому $a = b$ і $a \in K$.

Доведення обмеженості – теоретична задача.

($\Longleftarrow$) Будемо доводити для $m = 2$.

Оскільки K – обмежена множина на площині, то K міститься у деякому квадрати: $K \subset [a,b]\times[a,b]$.



Спочатку доведемо, що цей квадрат є компактною множиною. Нехай $\{(x_n, y_n)\} \subset [a,b]\times[a,b]$. Тоді $\{x_n\} \subset [a,b]$. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$: $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in [a,b]$. Розглянемо тепер послідовність $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\} \subset [a,b]$.

Тоді $\exists \{y_{n_{k_j}}\} \subset \{y_{n_k}\}$: $y_{n_{k_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} y_0 \in [a,b]$.

Тепер маємо, що $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \xrightarrow[j\to\infty]{} (x_0, y_0)$

і $(x_0, y_0) \in [a,b] \times [a,b]$.

Отже, K - замкнена множина і K міститься в компактній множині:

$K \subset [a,b] \times [a,b]$. Тепер загальний

факт.

Теоретична задача. Нехай K - замкнена множина, Q - компактна множина і $K \subset Q$. Довести, що K є компактною.

Неперервність.

Нехай $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ і $a \in \mathbb{R}^m$.

Означення f неперервна в т. $a \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall \{x^{(n)}\} : x^{(n)} \longrightarrow a \Longrightarrow f(x^{(n)}) \longrightarrow f(a).$$

Теорема Вейерштрасса (про неперервні функції на компакті).

Нехай $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – неперервна функція (тобто f неперервна в кожній точці) і K – компактна множина в $\mathbb{R}^m$. Тоді f обмежена на K і $\exists \min\limits_{x\in K} f(x)$, $\exists \max\limits_{x\in K} f(x)$.

<u>Доведення</u>. Нехай f є необмеженою на K, наприклад зверху. Тоді

$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x^{(n)} \in K): f(x^{(n)}) > n$, і тому ми маємо, що $f(x^{(n)}) \to +\infty$. Оскільки K компактна, то послідовність $\{x^{(n)}\}$ містить збіжну підпослідовність $\{x^{(n_j)}\}: x^{(n_j)} \xrightarrow[j\to\infty]{} a \in K$. Оскільки f неперервна в т. a, то $f(x^{(n_j)}) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(a)$.

Але, $f(x^{(n_j)}) \xrightarrow[j\to\infty]{} +\infty$ – суперечність.

---

f обмежена на $K \Leftrightarrow (\exists C>0)(\forall x \in K)$: $|f(x)| \le C$

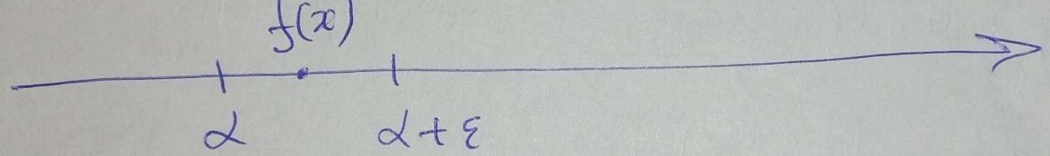
Доведемо тепер, що $\exists \min\limits_{x\in K} f(x)$,

тобто $(\exists a\in K)(\forall x\in K): f(x)\ge f(a)$.

Функція f обмежена знизу, тобто множина $\{f(x): x\in K\}$ обмежена знизу. Нехай $\alpha=\inf\{f(x): x\in K\}$.

Тоді $\forall x\in K: f(x)\ge \alpha$ і

$(\forall \varepsilon>0)(\exists x\in K): f(x)<\alpha+\varepsilon$.



Нехай $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Тоді $\exists x^{(n)}\in K$: $f(x_n)<\alpha+\frac{1}{n}$. Маємо:

$$\alpha \le f(x_n) < \alpha+\frac{1}{n},$$

$$\alpha$$

тобто $f(x^{(n)}) \longrightarrow \alpha$. Оскільки K є компактною, то $\exists \{x^{(n_j)}\}\subset\{x^{(n)}\}$: $x^{(n_j)} \xrightarrow[j\to\infty]{} a\in K$. Оскільки f неперервна в т. a, то $f(x^{(n_j)}) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(a)$.

Але, $f(x^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. Тому

$\alpha = f(a)$, тобто

$\inf\{f(x) : x \in K\} = f(a)$ і $a \in K$.

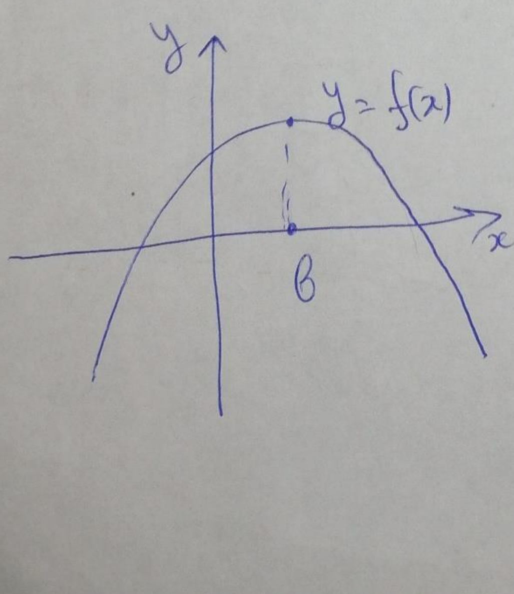
$\Longrightarrow f(a) = \min\limits_{x\in K} f(x)$.

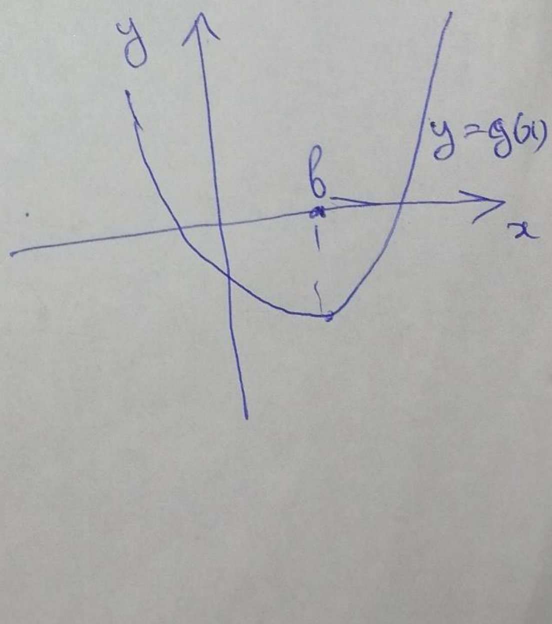
Для доведення існування $\max\limits_{x\in K} f(x)$

розглянемо функцію $g(x) = -f(x)$.

Тоді $\exists\, b \in K : g(b) = \min\limits_{x\in K} g(x)$ і

$f(b) = -g(b) = \max\limits_{x\in K} f(x)$.





<u>Приклад</u>. Нехай $r>0$. Розглянемо

$$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \le r\},$$

$$S_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = r\}.$$

Тоді $B_r(0)$ і $S_r(0)$ обмежені і замкнені, тобто $B_r(0)$ і $S_r(0)$ – компактні множини.

<u>Наслідок</u>. Нехай $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Тоді

$$\exists \min_{\|x\| \le r} f(x) \text{ і } \exists \min_{\|x\| = r} f(x).$$

<u>Означення</u>. Нехай $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall R > 0 \ \exists r > 0 :$$

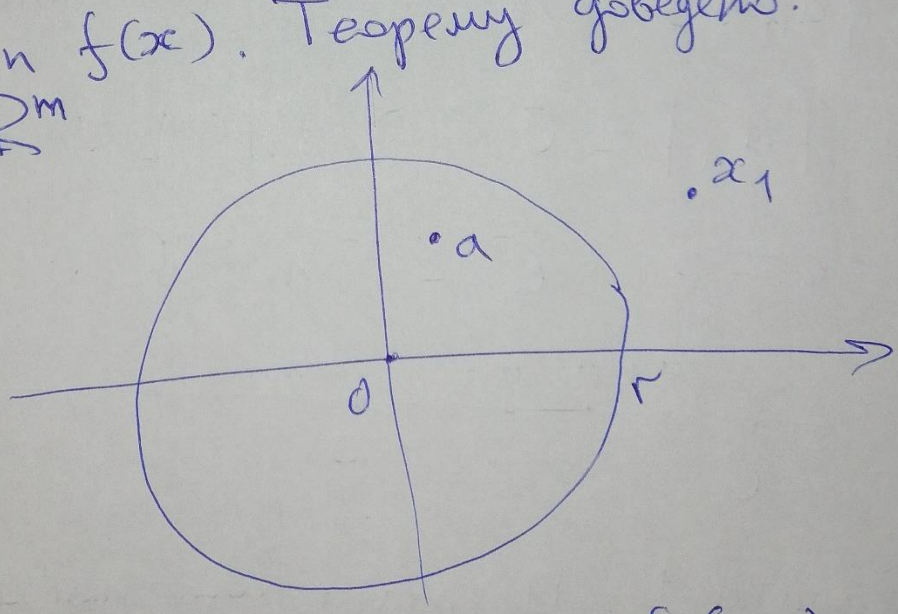
$$\|x\| > r \Rightarrow f(x) > R.$$

Теорема (достатня умова $\exists \min\limits_{x \in \mathbb{R}^m} f(x)$).

Нехай $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – неперервна і $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$. Тоді $\exists \min\limits_{x\in\mathbb{R}^m} f(x)$.

Доведення. Розглянемо $f(0)$.

Оскільки $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$, то $\exists r>0$: $f(x) > f(0)$, якщо $\|x\| > r$. Нехай $\alpha = \min\limits_{\|x\|\le r} f(x)$. Тоді при $\|x\|>r$ маємо: $f(x) > f(0) \ge \alpha$. Тому $\alpha = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^m} f(x)$. Теорему доведено.



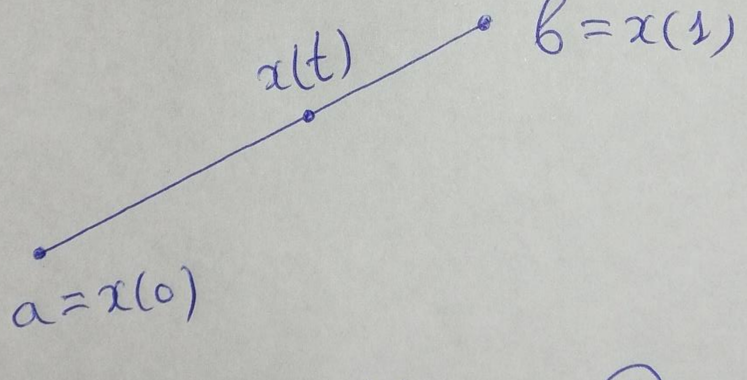
$$f(a) = \min_{\|x\|\le r} f(x) \le f(0) < f(x_1)$$

Лінійно зв'язні множини

Нехай $a, b \in \mathbb{R}^m$. Розглянемо $[a, b] \subset \mathbb{R}^m$:

$$[a, b] = \{a + t\cdot(b-a) : t \in [0,1]\}.$$

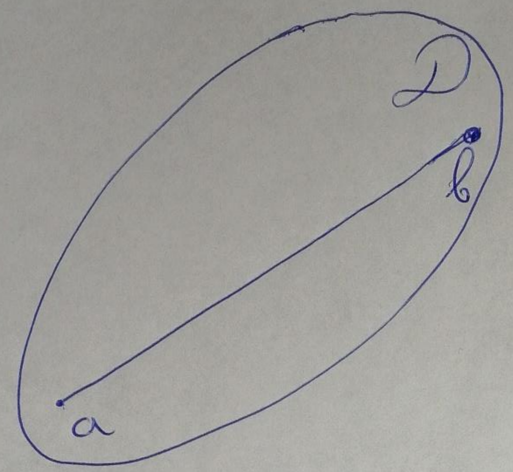
якщо $x(t) = a + t\cdot(b-a)$, то $x(0) = a$, $x(1) = b$. Маємо <u>стандартну параметризацію</u> відрізка

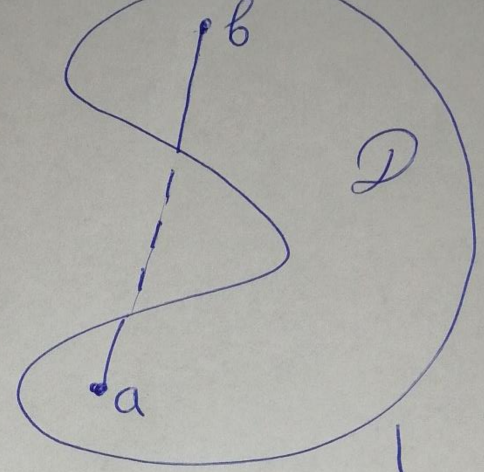


<u>Означення 1</u>. Нехай $D \subset \mathbb{R}^m$.

D - <u>опукла</u> множина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall a, b \in D : [a, b] \subset D.$$

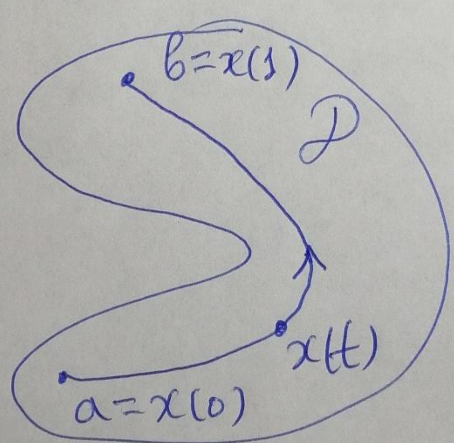




Не є опуклою!

Означення 2. Нехай $D \subset \mathbb{R}^m$.

D – лінійно зв'язна множина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a, b \in D$ $\exists$ неперервне відображення $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, для якого $x(0) = a$, $x(1) = b$ і $\forall t \in [0,1] : x(t) \in D$

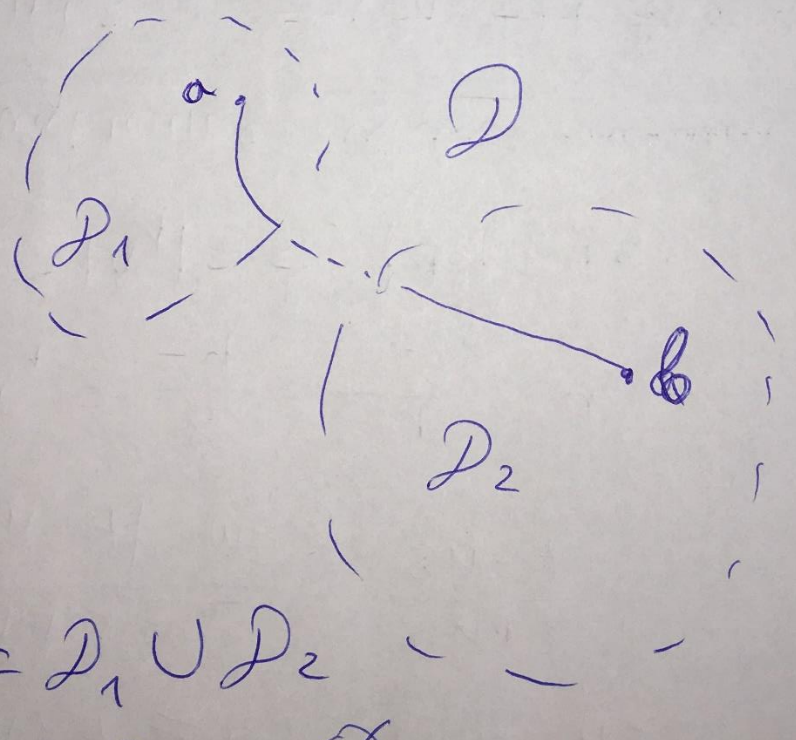


$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \text{ — вектор-функція}$$

$x(t)$ – непер. $\Longleftrightarrow \forall k \in \{1, \ldots, m\}$:

функція $x_k(t)$ непер.

Означення 3. Область в $\mathbb{R}^m$ – це відкрита лінійно зв'язна множина.



$D = D_1 \cup D_2$

$D_1 \cap D_2 = \varnothing$