Простір $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^m = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \dots, n \right\}$$

$m = 2$, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$,

$m = 3$, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^m$ – векторний простір.

Скалярний добуток

$x, y \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,
$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$,

$$\langle x, y \rangle \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{m} x_k y_k = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_m y_m$$

<u>Теорема</u> (нерівність Коші – Буняковського)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m : \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

<u>Доведення</u>. Нехай $t \in \mathbb{R}$. Оскільки

$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \geq 0$, то

$\langle x+ty, x+ty\rangle \geq 0$. Маємо:

$$\langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\underbrace{\langle y, x\rangle}_{\langle x, y\rangle} + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \overset{0}{\overset{\wedge}{\langle y, y\rangle}} t^2 + 2\langle x, y\rangle t + \langle x, x\rangle \geq 0$$

$\Rightarrow D \leq 0$, тобто $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle \leq 0 \iff \langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$.

Норма вектора

$x \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

$$\|x\| \overset{def}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{1/2}.$$

<u>Теорема</u> (нерівність трикутника).

$\forall x, y \in \mathbb{R}^m: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

<u>Доведення</u>. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle =$

$= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle =$

$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

Оскільки $\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$, то

$\sqrt{\langle x,y\rangle^2} \le \sqrt{\langle x,x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,y\rangle}$, тобто

$|\langle x,y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$. Зокрема,

$\langle x,y\rangle \le \|x\| \cdot \|y\|$. Тепер маємо:

$\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| +$

$+ \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. Тому

$\|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$, тобто

$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Наслідок (з доведення).

$\forall x, y \in \mathbb{R}^m : |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$ –

другий варіант нерівності Коші – Буняковського.

Відстань у просторі $\mathbb{R}^m$

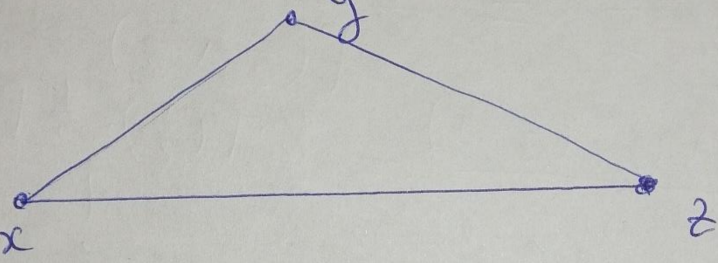
$x, y \in \mathbb{R}^m$, $d(x,y) \overset{\text{def}}{=} \|x-y\|$, тобто

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}.$$

Зокрема, $\|x\| = d(x,0)$.

<u>Теорема</u> (нерівність трикутника)

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^m: \ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.



<u>Доведення</u>. $d(x,z) = \|x - z\| =$

$= \|(x-y) + (y-z)\| \le \|x-y\| + \|y-z\| =$

$= d(x,y) + d(y,z)$.

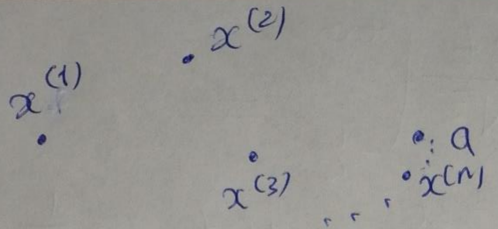
Збіжність у просторі $\mathbb{R}^m$

Вже було для $m=1$ і $m=2$ ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$).

<u>Означення</u> Нехай $\{x^{(n)}\} \subset \mathbb{R}^m$ і $a \in \mathbb{R}^m$

$$x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \overset{def}{\Longleftrightarrow} d(x^{(n)}, a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

тобто $\|x^{(n)} - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.



<u>Теорема</u> (про збіжність у просторі $\mathbb{R}^m$).

Нехай $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in \mathbb{R}^m$

і $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Тоді

$$x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \forall k \in \{1, \dots, m\}: x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_k$$

Таким чином, збіжність у просторі $\mathbb{R}^m$ є <u>покоординатною</u>.

<u>Доведення</u> ($\Rightarrow$). Нехай $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$,

тобто $d(x^{(n)}, a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Маємо:

$$d(x^{(n)}, a) = \left(\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - a_k)^2 \right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Нехай $k_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тоді

$$|x_{k_0}^{(n)} - a_{k_0}| = \sqrt{(x_{k_0}^{(n)} - a_{k_0})^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - a_k)^2} = d(x^{(n)}, a), \text{ тобто}$$

$$0 \le |x_{k_0}^{(n)} - a_{k_0}| \le d(x^{(n)}, a)$$

$$\to 0$$

$$\Rightarrow |x_{k_0}^{(n)} - a_{k_0}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$, тобто $x_{k_0}^{(n)} \to a_{k_0}$,

($\Leftarrow$) якщо $x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_k$ $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$,

то $(x_k^{(n)} - a_k)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Тому $d(x^{(n)}, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - a_k)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

тобто $x^{(n)} \to a$.

Окіл, куля і сфера в $\mathbb{R}^m$

Нехай $a \in \mathbb{R}^m$ і $r > 0$.

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, a) < r\},$$

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, a) \le r\},$$

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, a) = r\}.$$

Маємо: $B_r(a) = U_r(a) \cup S_r(a)$.

<u>Приклад 1.</u> $(m=1)$, $a \in \mathbb{R}$.

$$U_r(a) = (a-r, a+r),$$

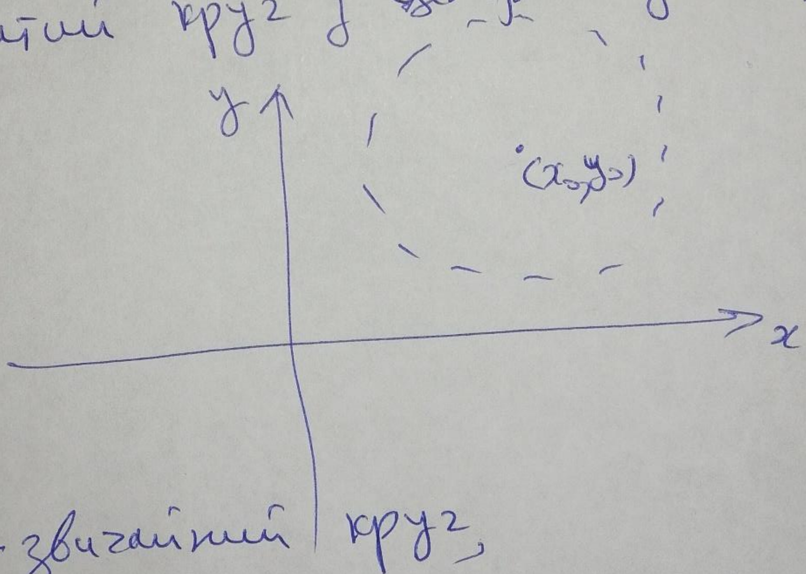
$$B_r(a) = [a-r, a+r],$$

$$S_r(a) = \{a-r, a+r\}.$$

<u>Приклад 2</u> $(m=2)$, $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$U_r(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$$

– відкритий круг з центром у т. (x_0, y_0)



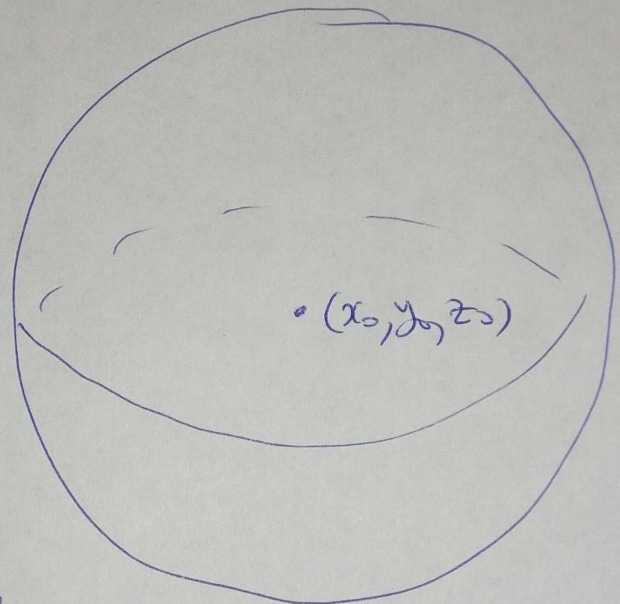
$B_r(a)$ – звичайний круг,

$S_r(a)$ – коло з центром у т. (x_0, y_0) і радіусом r.

<u>Приклад 3</u> $(m=3)$, $a=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$.

$$B_r(a)=\{(x,y,z):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2\}$$

– звичайна куля з центром в т. a і рад. r.



$S_r(a)$ – звичайна сфера.

<u>Приклад 4</u> $(m=4)$, $a=0$, $r=1$

$$B_1(0)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le 1\}$$

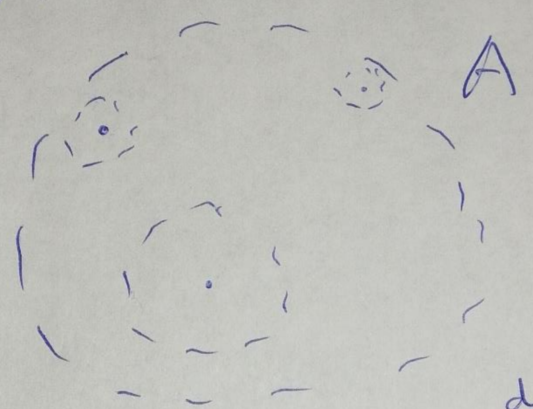
– чотиривимірна одинична куля.

Множини у просторі $\mathbb{R}^m$

Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$.

A – відкрита множина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$(\forall a \in A)(\exists \varepsilon > 0) : U_\varepsilon(a) \subset A$$

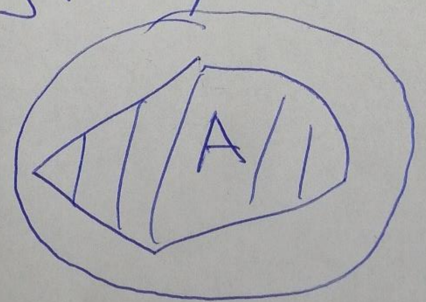


A – замкнена множина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall \{a^{(n)}\} \subset A : a^{(n)} \longrightarrow x \Rightarrow x \in A$$

A – обмежена множина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$(\exists b \in \mathbb{R}^m)(\exists r > 0) : A \subset B_r(b)$$



Теоретичні задачі

1. $U_r(a)$ – открита множина.
2. $B_r(a)$ – замкнена множина
3. A – відкрита множина $\Longleftrightarrow$

$\mathbb{R}^m \setminus A$ – замкнена множина.

($\mathbb{R}^m \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^m : x \notin A\}$ – доповнення множини A).

Компактність у просторі $\mathbb{R}^m$

Нехай $K \subset \mathbb{R}^m$.

K – компактна множина $\Longleftrightarrow$

$$(\forall \{x^{(n)}\} \subset K)(\exists \{x^{(n_j)}\} \subset \{x^{(n)}\}): x^{(n_j)} \xrightarrow[j\to\infty]{} a \in K.$$