Функціональний аналіз II
Тема 1. Оператори у банахових просторах – загальна теорія
Лекції 5-6

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Теорема про продовження неперервного функціонала.

Нехай Y – підпростір нормованого простору X, $f \in Y^*$. Тоді існує такий функціонал $\tilde{f} \in X^*$, що $\tilde{f}(y) = f(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Іншими словами, будь-який неперервний лінійний функціонал, заданий на підпросторі нормованого простору, продовжується на весь простір зі збереженням норми.

Теорема 1. Нехай X_1 – щільний підпростір нормованого простору X; Y – банахів простір, $T_1 \in L(X_1, Y)$. Тоді оператор T_1 однозначно продовжується до оператора $T \in L(X, Y)$.

Доведення. На підставі щільності підпростору X_1 для будь-якого $x \in X$ існує послідовність $x_n \in X_1$, яка прямує до x. Тоді $T_1 x_n$ утворюють в Y послідовність Коші:

$$\|T_1 x_n - T_1 x_m\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Позначимо границю цієї послідовності через $T(x)$. Тоді

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_1 x_n\| \leqslant \|T_1\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T_1\| \cdot \|x\|.$$

Нам потрібно перевірити коректність означення $T(x)$, тобто що $T(x)$ залежить тільки від x і не залежить від вибору x_n.

Справді якщо $x_n^1 \in X_1$ – це деяка інша збіжна до x послідовність, то

$$\left\| T_1 x_n - T_1 x_n^1 \right\| \leqslant \|T_1\| \cdot \left\| x_n - x_n^1 \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

і, отже, границі у $(T_1 x_n)$ і $(T_1 x_n^1)$ однакові.
Тепер перевіримо лінійність оператора T. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $x_1^n, x_2^n \in X_1$, $x_2^n \to x_2$, $x_1^n \to x_1$ $(n \to \infty)$. Маємо

$$T(ax_1 + bx_2) = \lim_{n\to\infty} T_1(ax_1^n + bx_2^n) =$$
$$= a \lim_{n\to\infty} T_1(x_1^n) + b \lim_{n\to\infty} T_1(x_2^n) = aT(x_1) + bT(x_2).$$

З огляду на нерівність $\|T(x)\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|x\|$ оператор T неперервний, тобто $T \in L(X, Y)$. Отже, ми довели існування продовження. Єдиність випливає з того, що дві неперервні функції, які збігаються на щільній множині, збігаються скрізь.

Вправи

3.1. У наведеному вище міркуванні ми опустили перевірку того, що оператор T є продовженням оператора T_1. Перевірте це самостійно.
3.2. Доведіть, що в умовах попередньої теореми $\|T\| \leqslant \|T_1\|$.
3.3. Нехай X, Y – нормовані простори, $X_1 \subset X$ – ненульовий підпростір, $T \in L(X, Y)$ – це продовження оператора $T_1 \in L(X_1, Y)$. Тоді $\|T\| \geqslant \|T_1\|$.
3.4. Зіставивши вправи 3.2 і 3.3, доведіть, що в умовах теореми 1 $\|T\| = \|T_1\|$.
3.5. Наведіть приклад неперервної функції, заданої на щільній підмножині відрізка [0,1], яка проте не продовжується на весь відрізок зі збереженням неперервності.

Нехай X_1 – деякий підпростір нормованого простору X. Оператор $P \in L(X, X)$ називається проектором на X_1, якщо $P(X) \subset X_1$ і $Px = x$ для будь-якого $x \in X_1$.

Теорема 2. Для підпростору X_1 нормованого простору X такі умови еквівалентні:

(1) в X існує проектор на X_1;

(2) для будь-якого нормованого простору Y кожний оператор $T_1 \in L(X_1, Y)$ продовжується до оператора $T \in L(X, Y)$.

Доведення. $(1) \Rightarrow (2)$. Означимо $T \in L(X, Y)$ формулою $Tx = T_1(Px)$. Перевірка властивостей – на дошці.

(2) $\Rightarrow$ (1). Візьмемо $Y = X_1$ і означимо $T_1 \in L(X_1, Y)$ за правилом $T_1 x = x$. Нехай $T \in L(X, Y)$ – продовження оператора T_1. Оскільки в нашому випадку $Y \subset X$, ми можемо розглядати T як оператор з X в X. Маємо: $T(X) \subset Y = X_1$, і для будь-якого $x \in X_1$ виконуються рівності $Tx = T_1 x = x$. Тобто T і є шуканим проектором на X_1. $\square$

Вправа 3.6. Для підпростору X_1 нормованого простору X такі умови еквівалентні:

- в X існує проектор P на X_1 з $\|P\| = 1$;
- для будь-якого нормованого простору Y кожний оператор $T_1 \in L(X_1, Y)$ продовжується до оператора $T \in L(X, Y)$ з $\|T\| = \|T_1\|$.

Вправи

3.7. Нехай X_1 – підпростір нормованого простору X, $P \in L(X, X)$ – проектор на X_1. Тоді $P(X) = X_1 = \mathrm{Ker}(I - P)$ і підпростір X_1 замкнений в X.

3.8. Нехай в умовах попередньої вправи $X_1 \neq \{0\}$. Тоді

$$\|P\| \geqslant 1.$$

3.9. Простір числових рядків $x = (x_1, x_2, x_3)$ з нормою $\|x\| = |x_1| + |x_3| + |x_3|$ позначається ℓ_1^3. Побудуйте у тривимірному координатному просторі одиничну кулю простору ℓ_1^3

3.10. Нехай $X = \ell_1^3$, X_1 – підпростір, що складається з усіх елементів з нульовою сумою координат. Доведіть, що в X не існує проектора P на X_1 з $\|P\| = 1$.

Підпростір, на який існує неперервний проектор, називають доповнювальним.

В гільбертовому просторі кожний замкнений підпростір доповнювальний, в загальних банахових просторах це вже не так.

Нехай X, E – нормовані простори, $T \in L(X, E)$. Спряженим оператором до оператора T називається оператор $T^*\colon E^* \to X^*$, який ставить у відповідність кожному функціоналу $f \in E^*$ функціонал $T^* f = f \circ T$. Іншими словами, функціонал $T^* f \in X^*$ діє за правилом $(T^* f)(x) = f(Tx)$.

Аналог зі спряженим оператором в гільбертовому просторі (на дошці).

Наступна теорема була в курсі функціонального аналізу:
Оператор T^* неперервний, і $\|T^*\| = \|T\|$.

Сьогодні ми розглянемо біль детально зв'язок між властивостями вихідного оператора та спряженого до нього та надамо деякі застосування.

Нехай A – підмножина нормованого простору X. Анулятором підмножини A називається множина функціоналів

$$A^{\perp} = \{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ для всіх } y \in A\}.$$

$A^{\perp}$ – замкнений підпростір простору X^*. В курсі функціонального аналізу доводили, що для замкненого підпростору Y нормованого простору X такі властивості еквівалентні:

1. $Y = X$.
2. $Y^{\perp} = \{0\}$.

Теорема 3. Образи і ядра операторів T і T^* пов'язані такими співвідношеннями:

(1) $\operatorname{Ker} T^* = (T(X))^\perp$;

(2) $T^*(E^*) \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Доведення. (1)

$$(f \in \operatorname{Ker} T^*) \Leftrightarrow (T^* f = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in X : (T^* f)x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in X : f(Tx) = 0) \Leftrightarrow (f \in (T(X))^\perp).$$

(2) Нехай $g \in T^*(E^*)$, тобто $g = T^* f$ для деякого $f \in E^*$. Тоді для будь-якого $x \in \operatorname{Ker} T$ маємо

$$g(x) = (T^* f)(x) = f(Tx) = 0,$$

тобто $g \in (\operatorname{Ker} T)^\perp$. □

Наслідок 1. Для того, щоб оператор T^* був ін'єктивним, необхідно і достатньо, щоб оператор T мав щільний образ. Зокрема, якщо оператор T сюр'єктивний, то T^* ін'єктивний.

Наслідок 2. Якщо оператор T^* сюр'єктивний, то T ін'єктивний.

Для доведення наслідку 1 достатньо застосувати першу частину попередньої теореми 3. Наслідок 2 випливає з другої частини теореми 3.

Вправи

3.11. Нехай X, Y, Z – нормовані простори, $T_1 \in L(X, Y)$, $T_2 \in L(Y, Z)$. Тоді $(T_2 T_1)^* = T_1^* T_2^*$.

3.12. Наведіть приклад, де $T^*(E^*) \neq (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

3.13. Якщо оператор T^* має щільний образ, то T ін'єктивний. Обернене твердження неправильне. Підказка – діагональний оператор в ℓ_1 – буде на дошці.

3.14. Нехай $T \in L(X, Y)$ – бієктивний оператор, $T^{-1} \in L(Y, X)$. Тоді $\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$.

Нехай X – нормований простір, Y – підпростір в X. Розглянемо оператор $R\colon X^* \to Y^*$ (оператор обмеження), який ставить кожному функціоналові $f \in X^*$ його обмеження на Y.

Оскільки кожний функціонал, заданий на Y, можна продовжити на весь X, оператор R сюр'єктивний. Ядро оператора R збігається з $Y^\perp$. Позначимо через U ін'єктивізацію оператора R. Згідно з означенням ін'єктивизації $U \in L(X^*/Y^\perp, Y^*)$, і якщо $f \in X^*$ і $[f]$ – відповідний елемент фактор-простору $X^*/Y^\perp$, то $U[f]$ – функціонал, який діє на елемент $y \in Y$ за правилом $(U[f])(y) = f(y)$.

Оператор U бієктивний (ін'єктивізація сюр'єктивного оператора) і називається канонічним ізоморфізмом просторів $X^*/Y^\perp$ і Y^*. Наступна теорема виражається умовною рівністю

$$Y^* = X^*/Y^\perp.$$

Теорема 4. Канонічний ізоморфізм просторів $X^*/Y^\perp$ і Y^* є ізометрією, тобто для будь-якого $[f] \in X^*/Y^\perp$ правильна рівність $\|U[f]\| = \|[f]\|$.

Доведення. $U[f]$ – лінійний неперервний функціонал, заданий на підпросторі Y. За теоремою Гана-Банаха існує g – продовження функціонала $U[f]$ на весь X з $\|g\| = \|U[f]\|$. Оскільки функціонали g і f збігаються на Y, $[f] = [g]$. Маємо

$$\|U[f]\| = \|g\| \geqslant \|[g]\| = \|[f]\| \,.$$

Навпаки, оператор обмеження R не збільшує норми функціонала, тобто $\|R\| \leqslant 1$. Оскільки U – ін'єктивізація оператора R, то й $\|U\| \leqslant 1$. Відповідно, $\|U[f]\| \leqslant \|[f]\|$. $\square$

Аналогічний опис існує і для простору, спряженого до фактор-простору. Цей опис, який виражається умовною рівністю

$$(X/Y)^* = Y^\perp,$$

читач отримає, розв'язавши нижченаведені вправи.

Нехай $q\colon X \to X/Y$ – фактор-відображення ($q(x) = [x]$ для всіх $x \in X$), $q^*\colon (X/Y)^* \to X^*$ – відповідний спряжений оператор. Доведіть, що:

3.15. Оператор q^* діє за правилом $(q^* f)(x) = f([x])$.

3.16. Образ оператора q^* збігається з $Y^\perp$.

3.17. Оператор q^* здійснює бієктивну ізометрію просторів $(X/Y)^*$ і $Y^\perp$.

Нехай j – оператор природного вкладення підпростору Y у ширший простір X ($j(y) = y$ для всіх $y \in Y$), $j^*\colon X^* \to Y^*$ – його спряжений оператор.

3.18. Перевірте, що j^* збігається з оператором обмеження R.